出國報告（出國類別：其他）

參加 2023 年 BIS 舉辦
「投資組合分析研討會」
（Portfolio Analytics Workshop）
心得報告

服務機關：中央銀行

姓名職稱：謝蕙如三等專員

派赴國家/地區：瑞士/**Brunnen**

出國期間：**112** 年 **6** 月 **10** 日至 **6** 月 **18** 日

報告日期：**112** 年 **8** 月 **28** 日

目　錄

壹、　前言 **1**

貳、　投資組合分析關鍵概念 **2**

一、　利率的種類 2

二、　配適殖利率曲線 8

三、　衡量報酬的不確定性 10

參、　解構債券投資組合報酬 **13**

一、　拆解影響債券價格變化因素 13

二、　建構債券投資組合報酬率公式 17

肆、　探討債券投資績效 **18**

一、　績效衡量期間有存入或提取資金情況 18

二、　單一債券投資標的實例分析 20

三、　債券投資組合實例分析 22

伍、　心得與建議 **25**

一、　研習心得 25

二、　研習建議 25

參考資料 **27**

壹、 前言

本次參加國際清算銀行（Bank for International Settlements，以下簡稱 BIS）於瑞士 Brunnen 舉辦「投資組合分析研討會」(Portfolio Analytics Workshop)，課程內容涵蓋債券曝險、投資組合績效貢獻與衡量報酬之不確定性等，主題圍繞在分析投資組合的報酬與風險，並進一步將報酬來源細部拆分，以更清楚辨識績效表現的影響因素。除此之外，為使課程內容更貼近實務運用，BIS 設計以扮演投資組合經理人角色之分組競賽貫穿全程，利用 excel 實機操作，配合每天授課進度給予不同指令，促使團隊成員腦力激盪以達成給定目標，在討論的過程中，團員間彼此交流挑選資產項目的看法及觀點，有助啟發投資專業思維。

在評估資產組合投資績效時，若只憑單一報酬率即論斷績效表現好壞，容易忽略報酬率背後隱含許多重要訊息。事實上，將報酬率逐步拆解成細項並加以分析，可以檢視投資活動中的每個細節，從更多面向詳盡探究影響報酬率的因素，更能精準掌握資產組合的特性，有助增進決策品質。有效率的投資並創造獲利的關鍵在於對資產部位有深刻理解，這是本報告主要探討的核心重點。

本報告共分為四大部分，第一部分介紹分析投資組合的關鍵概念，為實務應用時建立基礎知識；第二部分將解構債券投資組合的報酬率，先拆解成細項再建構整體報酬率；第三部分為債券投資實際案例說明及績效分析；最後則為心得與建議。

貳、 投資組合分析關鍵概念

具備良好的投資觀念與知識，是進行投資分析的重要關鍵，培養正確的投資思維，將有助於提升分析能力，從而增進投資決策品質。分析債券投資時，主要涉及三大基本面向，以下分別討論。

一、利率的種類

利率，依照不同的使用情境，有其隱含的不同意義。舉例來說，央行執行貨幣政策最主要的運用工具即為利率水準的調控，此時，利率意味著資金的價格，反映的是資金成本；金融市場上，利率是債務的成本，亦為衡量風險的重要指標；至於在投資的領域，利率通常被視為貨幣的時間價值，因為受時間的影響，金錢代表的價值也會隨之改變，需要透過利率來表示不同時點的貨幣價值關係。以下便依序介紹債券投資分析時常用的利率類型：

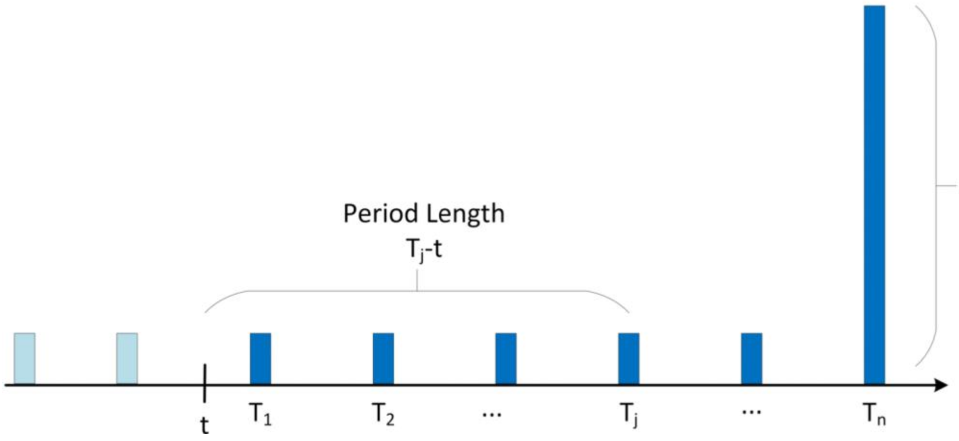
（一）折現率

從投資的角度來看，無論是評估資產的價值或是比較各種決策選項之差異，都必須納入時間的觀念，將未來的現金流量折算成現在的價值加以考量，這種「折現」的過程所使用的調整利率即稱為折現率（discount rate），說明現在與未來貨幣的價值交換比率。如圖 1 所示，投資債券的現金流量包含定期賺取的票面利息及到期時收回的本金，將這些未來收入折算成現值再全部加總後，就是債券的市場價格，以數學公式表達如下：

$$V = V(t, y) = \sum_{j=1}^{n} \frac{c_{T_j}}{(1+y)^{T_j - t}}$$

其中，V 代表價值，T 及 t 分別表示不同時點，C 為每期收取的利息，y 係所適用的折現率。透過上列式子可知，債券的價格是利率與時間的函數（function）。

圖 1 債券現金流量示意圖



資料來源：Gehlen (2023)

（二）折現因子

折現因子（discount factors）係指未來的 1 元，考量經過的期間加以折算後，相當於現在的多少金額，如下列所示：

$$DF_T \cdot (1+z_T)^{T-t} = 1$$

換言之，利用終值（future value）乘以折現因子計算後，即得出現值（present value）。值得注意的是，折現因子為未來單筆現金流量（one cash flow）轉換成當下的相對價值，因此，將各個時間點的現金流找出適當折算比例，可用來評估目前的合理價格。折現因子通常不易從市場中直接觀察，但運用數學方法，就能藉著金融商品實際成交的利率或價格去推算該數值。此外，折現因子與利率之間可以交互替換，然而實務上仍是以較為直覺且方便理解的利率方式表達。

（三）零息債券利率

零息債券則是指債券之現金流量僅發生在到期日時，也就是說，持有期間內並不會有任何現金流入，利息與本金皆於期滿才一次性給付，而折算成現值所使用的利率，即稱為零息債券利率（zero coupon rate）。零息債券與前段介紹的折現

因子有個共通點—均牽涉單筆現金流量，故可將折現因子視為零息債券之價格，兩者間的關係式：

$$V(t, z_T) = DF_T = \frac{1}{(1+z_T)^{T-t}}$$

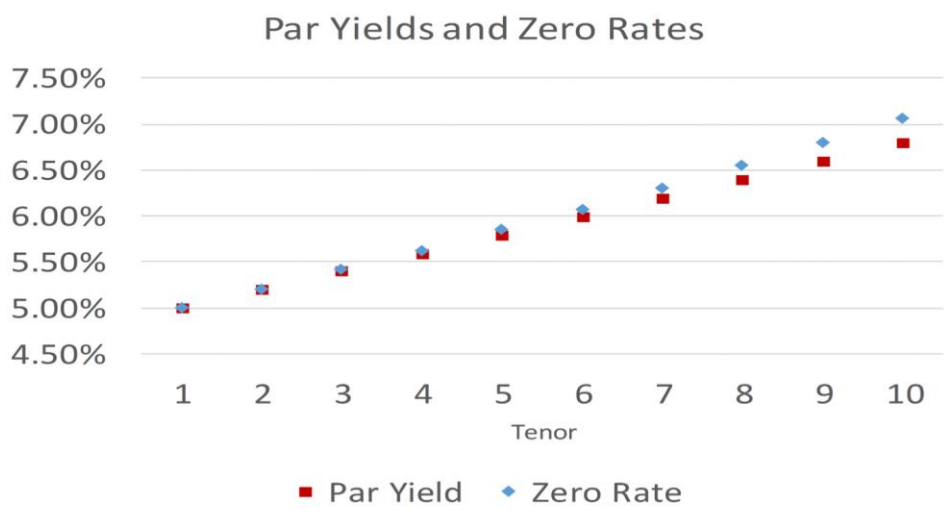
計算利息時，根據支付期間的不同，有複利（compounding）次數上的差別。一般來說，債券付息頻率包括：單利計算、每年（annual）複利 1 次、每半年（semi-annual）複利 1 次以及連續（continuous）複利。零息債券利率可依照不同的應用需要，在不同付息頻率之間轉換。以 10 年期折現因子為例，表達如下：

$$\begin{aligned} DF_T &= \underbrace{\frac{1}{(1+(T-t)\cdot z_T)}}_{\text{none (Money Market deposit)}} = \underbrace{\frac{1}{(1+z'_T)^{T-t}}}_{\text{annual}} \\ &= \underbrace{\frac{1}{(1+z''_T/2)^{2\cdot(T-t)}}}_{\text{semi-annual}} = \underbrace{\exp\left(-z'''_T\cdot(T-t)\right)}_{\text{continuous}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} DF_{10y} = 0.6666\ldots &= \underbrace{\frac{1}{(1+10\cdot 5.00\%)}}_{\text{none}} = \underbrace{\frac{1}{(1+4.14\%)^{10}}}_{\text{annual}} \\ &= \underbrace{\frac{1}{(1+4.10\%/2)^{(2\cdot 10)}}}_{\text{semi-annual}} = \underbrace{\exp\left(-4.05\%\cdot 10\right)}_{\text{continuous}} \end{aligned}$$

由於零息債券利率，僅考慮到期時一筆現金流量，與附息債券在到期前產生之多筆現金流量相較之下，不會受到票面利息影響，可以規避票息效果造成的估計誤差，過濾掉附息殖利率所包含的雜訊，能夠清楚地呈現債券相對價值，是債券市場分析比較的基石（building blocks）。圖 2 說明，當市場殖利率曲線為正斜率的情況下，票面殖利率將低於零息利率，主要係因票息效果導致債券的實際報酬率被低估，兩者之間的差距隨著到期年限越久而逐漸擴大。實際上，附息債券是由多期別的零息債券組合而成，一個 n 期的附息債券，可以拆解成 n 個零息債券組合。

圖 2 不同期別之票面殖利率與零息利率



資料來源：Gehlen (2023)

利用多期無估計偏誤的零息債券建構出的零息利率曲線適合作為債券評價的理論依據，其可藉由觀察市場上不同期間的附息債券殖利率報價，透過數學運算去反推每期零息債券利率，這樣的推演所使用的方法稱為拔靴法（bootsrapping）。推導過程逐步列示如下：

各年期殖利率與折現因子之關係表達為：

$$1 = y_{ny}\left(DF_{1y} + \cdots + DF_{ny}\right) + DF_{ny}$$

觀察各年期殖利率可依序推算該期折現因子：

$$DF_{1y} = \frac{1}{\left(1 + y_{1y}\right)}$$

$$DF_{2y} = \frac{1 - y_{2y}DF_{1y}}{\left(1 + y_{2y}\right)}$$

$$DF_{3y} = \frac{1 - y_{3y}\left(DF_{1y} + DF_{2y}\right)}{\left(1 + y_{3y}\right)}$$

將各年期折現因子轉換成該期零息利率：

$$z_T = \sqrt[T-t]{\frac{1}{DF_T}} - 1$$

（四）債券到期殖利率與票面殖利率

將債券未來個別現金流折算成現在價值的加總，並考量付息頻率及付息期間的畸零日，利用下列數學公式可更為完整說明債券價格估算方式：

$$V(t,y) = \frac{1}{(1+y/f)^{\alpha_t}} \sum_{j=0}^{n} \frac{c/f}{(1+y/f)^j} + \frac{1}{(1+y/f)^n}$$

其中，y 為債券到期殖利率（bond yield to maturity），其指的是，從買入該筆債券一直持有至到期，這段期間所獲得的平均年報酬率。用另外一種說法，到期殖利率代表投資期間各期零息利率的平均數，隱含每期均有相同投資報酬率的假設。

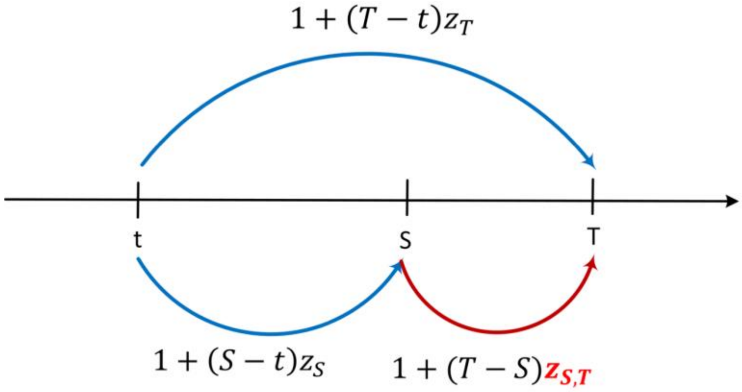
當債券的成交價格恰好等於其面額，則所計算出的到期殖利率等同於票面利率，即可稱為票面殖利率（par yield），表示如下：

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\overbrace{c/f}^{=y/f}}{(1+y/f)^j} + \frac{1}{(1+y/f)^n} = 1$$

（五）遠期利率

遠期利率（forward rate）係經由目前零息利率去推算未來某個時點的利率，比方說，想要知道 1 年後的 1 年期利率為多少？即可以當下已知的 1 年期及 2 年期利率估算，因為在無套利空間的假設情況下，無論是一次投資 2 年期或拆分為連續投資兩次 1 年期，結果都必須是相同的，如圖 3。

圖 3 推估遠期利率示意圖



資料來源：Gehlen (2023)

遠期利率反映市場當下對未來利率的預期，有助研判利率水準走勢。即使特定時點的遠期利率並不表示必然於未來實際出現，然仍可與目前相同期限之即期利率比較，作為選擇進場時點的考量依據，例如，當現在市場利率$z_T(S) < z_{S,T}$，建議可直接等到時間點 T 再買進。以數學式表達為：

$$\underbrace{(1+(T-t)\cdot z_T)}_{\text{payment deposit (1) on } T} = \underbrace{(1+(S-t)\cdot z_S)\cdot(1+(T-S)\cdot z_{S,T})}_{\text{payment deposit (2)+(3) on } T}$$

舉例來說，假設目前市場上 3 個月期及 4 個月期的零息利率分別為 2%及 2.1%，利用數學推導估計 3 個月後之 1 個月期遠期利率，計算過程為：

$$\left(1+\frac{4}{12}\cdot z_{4m}\right) = \left(1+\frac{3}{12}\cdot z_{3m}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{12}\cdot z_{3m,4m}\right)$$

即可求得：

$$z_{3m,4m} = \left[\frac{1+\frac{4}{12}\cdot z_{4m}}{1+\frac{3}{12}\cdot z_{3m}} - 1\right]\cdot\frac{12}{1} = 2.38\%$$

二、配適殖利率曲線

（一）殖利率曲線涵義

在某時點上，不同到期日的債券與相對應殖利率之間的關係，稱為利率期限結構（term structure of interest rates），將之表達成圖，從而繪製出的曲線線條，即為殖利率曲線（yield curve）。

殖利率曲線有許多功用：第一，債券投資主要關注在不同時點現金流量的現在價值，因此在各時間點找到合適的折現率對於評定債券價格相當重要，依據殖利率圖便可作為定價參考；第二，不同類型債券殖利率曲線，各自涵蓋不同的資訊，其中的利差（yield spread）通常代表發行人違約程度不同造成信用風險的差異；第三，觀察殖利率曲線形狀可瞭解市場對於各期間（tenors）利率水準之看法。利率是各期間債券供給需求相等時的均衡價格，投資人要求利率的高低反映出對各期間債券的偏好，從而導致不同的流動性。可能影響偏好的因素包括投資時間長度或喜愛某特定期間的債券，同時亦可作為市場對未來利率動向的預期；最後，藉著殖利率曲線的變動可精確分析各期間債券價格變化反應的情況。

（二）建置殖利率曲線

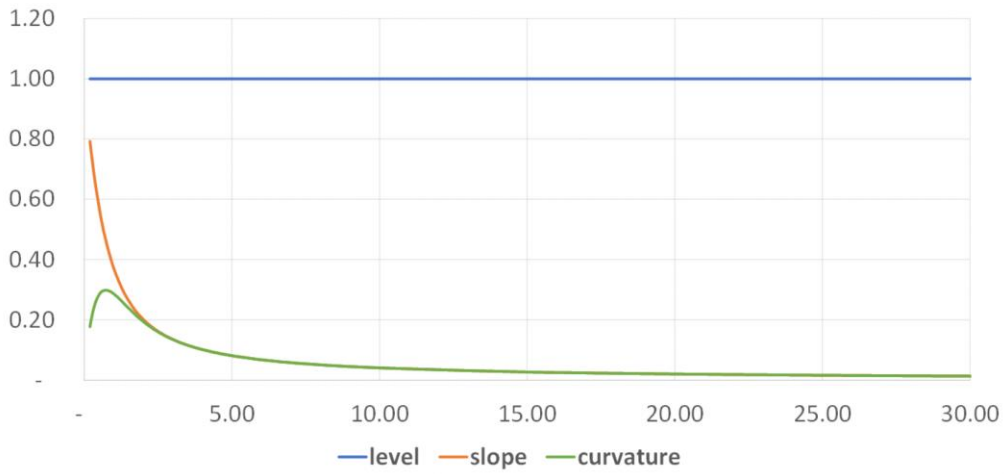
如先前所述，零息利率排除含有雜訊的票息效果，不需面臨利息的再投資風險，是估計理想殖利率曲線的參考指標。而進行債券分析時，需要在任何時點皆可獲得用來判斷理論價格的利率資訊，因此，零息殖利率曲線必須滿足具備連續性的特質。然而，目前市場上零息債券交易資料有限，必須藉著容易觀察到的附息債券成交利率，利用數學方式推導出來。一般在實務應用上，除了前面已說明的拔靴法外，也可以透過統計技術來配適殖利率曲線（fitting yield curve），以下介紹 Nelson-Siegel 模型。

Nelson 及 Siegel 於 1987 年提出的模型，描述整條殖利率曲線係由三種要素組合而成，分別是水平（level）、斜率（slope）和曲度（curvature），如下列方程式所示：

$$r_T = \beta_0 \cdot \underbrace{\alpha_{0,T}}_{\text{level}} + \beta_1 \cdot \underbrace{\alpha_{1,T}}_{\text{slope}} + \beta_2 \cdot \underbrace{\alpha_{2,T}}_{\text{curvature}}$$

圖 4 說明 Nelson-Siegel 模型三種要素與各天期之關聯性，隨著時間越長，斜率與曲度趨近於 0。

圖 4 Nelson-Siegel 模型三要素與期間長度之關係圖



資料來源：Gehlen (2023)

將 Nelson-Siegel 模型以更完整的函數形式表達為：

$$\begin{aligned} r_T = \beta_0 \cdot \underbrace{1}_{\alpha_{0,T}} \quad &+ \quad \beta_1 \cdot \underbrace{\left[1 - \exp\left(\frac{-\tau}{\lambda}\right)\right] \cdot \frac{\lambda}{\tau}}_{\alpha_{1,T}} \\ &+ \quad \beta_2 \cdot \underbrace{\left(\left[1 - \exp\left(\frac{-\tau}{\lambda}\right)\right] \cdot \frac{\lambda}{\tau} - \exp\left(\frac{-\tau}{\lambda}\right)\right)}_{\alpha_{2,T}} \\ &= \quad \beta_0 \cdot \text{level} + \beta_1 \cdot \text{slope} + \beta_2 \cdot \text{curvature} \end{aligned}$$

其中，該模型有四個估計參數，分述如下：

β_0為長期因子，影響殖利率曲線的水平。由於β_0為一常數，不受期間τ影響；

β_1為短期因子，影響殖利率曲線的斜率；

β_2為中期因子，影響殖利率曲線的曲度；

λ為衰退因子，影響殖利率曲線收斂速度。當λ值越小，收斂速度較快，意味著短期和中期影響力較早開始衰退，所形成的殖利率曲線形狀較平緩，對長天期殖利率配適較佳，反之，短期和中期影響力衰退較慢，對短天期殖利率配適較佳。

綜結來說，透過該模型可掌握殖利率曲線的形狀及移動，且可拆解為水平移動、斜率變化及曲度變化，以探討各因子對短、中、長天期利率期限結構的影響，並對變動趨勢進行預測。其優點在於（1）僅利用簡單且較少的參數，（2）估計出平滑且連續的殖利率曲線及（3）良好配適能力及分析架構。

三、衡量報酬的不確定性

債券價格將如何變動並無法事先預測，面對這樣的不確定性，一般而言，係利用標準差或變異數作為風險衡量的指標，來呈現資料間離散程度。舉例而言，在投資組合價值對各種風險的敏感度或相關性已知情況下，透過檢驗風險因素的變化，可推估投資組合的報酬表現，如下列所示：

$$\text{Return} \approx \text{Sensitivities}^T \cdot \text{Next Market Movement}.$$

其中，對於市場未來趨勢走向，可利用統計方法分析歷史資料估算預期的波動範圍。接著，將投資組合本身風險敏感度及市場波動度兩者相結合，求出該組合報酬率的標準差，據以評估潛在的投資收益，數學公式表達為：

$$\sigma_r \approx \sqrt{\delta^T \Sigma_M \delta}$$

由於債券的到期天數是持續地動態演變，某特定期間債券隨著時間推進，即轉換到不同期間的類別，以致債券投資組合風險狀況不斷改變，必須要利用更明確及完整的控管方法來有效管理風險。在投資管理領域中，追蹤誤差(Tracking

Error, TE)及風險值(Value at Risk, VaR)是常見評估資產組合相對風險的參考依據，兩者皆為標準差概念作進一步的運用。

（一）追蹤誤差

追蹤誤差是利用投資組合報酬率與標竿指數(benchmark)報酬率之差距計算標準差，反映投資組合與指標間報酬率差異的波動或變異程度，換言之，追蹤誤差即是相對報酬的標準差，TE 值越小表示績效越貼近標竿指數，追蹤效果較好。BIS 建議將投資組合的 TE 細部拆分至組合內的每個資產，考量投資權重，據以計算各資產的邊際貢獻，有助瞭解組成內每一微小變動對 TE 的影響，以下列公式表示：

$$
\begin{aligned}
\mathrm{TE} &= \mathrm{TE}(\omega_{a,1},\ldots,\omega_{a,N_B}) = \sqrt{\omega_a^T \Sigma_{R_B} \omega_a} \\
&= \sum_{j=1}^{N_B} \boxed{\text{active weight of security}_j} \cdot \boxed{\text{marginal TE of security}_j} \\
&= \underbrace{\omega_{a,1}\frac{\partial \mathrm{TE}}{\partial \omega_{a,1}}}_{\substack{\text{TE from} \\ \text{first security}}} + \underbrace{\omega_{a,2}\frac{\partial \mathrm{TE}}{\partial \omega_{a,2}}}_{\substack{\text{TE from} \\ \text{second security}}} + \cdots + \underbrace{\omega_{a,N_B}\frac{\partial \mathrm{TE}}{\partial \omega_{a,N_B}}}_{\substack{\text{TE from} \\ N_B\text{th security}}}
\end{aligned}
$$

其中，主動權重(active weight)係指投資組合與標竿指數之間的權重差異。

（二）風險值

風險值是指給定信賴水準下，投資組合在特定期間內可能產生的最大損失。舉例來說，某部位的一天 99%VaR 為一百萬元，指的是，有 99%的信心，該部位在未來一天內最大的損失不會超過一百萬元。在投資組合的報酬率為常態分配的假設下，VaR 僅針對部位的損失範圍，即以單尾觀點估計最大的損失金額，運用數學式可推算出，若信賴區間為 99%，VaR 約為 2.33 倍的標準差，其表示，報

酬率落在大於-2.33 倍標準差之內的機率有 99%；若信賴區間為 95%，VaR 則約為 1.64 倍標準差。透過數學方法，亦可將在相同信賴區間的 VaR 轉換成其他天數，轉換公式如下列所示：

$$VaR_{N-day} = VaR_{1-day} \times \sqrt{N}$$

如同先前對 TE 所作的細部分析，將 VaR 拆解至組合內各資產並計算邊際效果，可得數學公式如下：

$$\begin{aligned}
\text{VaR} &= \text{VaR}(\omega_p) = \sqrt{\omega_p^T \sigma_{R_B} \omega_p} \\
&= N^{-1}(\alpha)\left(\sum_{j=1}^{N_B} \boxed{\begin{matrix}\text{weight}\\ \text{of security}_j\end{matrix}} \cdot \boxed{\begin{matrix}\text{marginal VaR}\\ \text{of security}_j\end{matrix}}\right) \\
&= N^{-1}(\alpha)\left(\underbrace{\omega_{p,1}\frac{\partial \sigma_p}{\partial \omega_{p,1}}}_{\substack{\text{VaR from}\\ \text{first security}}} + \underbrace{\omega_{p,2}\frac{\partial \sigma_p}{\partial \omega_{p,2}}}_{\substack{\text{VaR from}\\ \text{second security}}} + \cdots + \underbrace{\omega_{p,N_B}\frac{\partial \sigma_p}{\partial \omega_{p,N_B}}}_{\substack{\text{VaR from}\\ N_B\text{th security}}}\right)
\end{aligned}$$

參、 解構債券投資組合報酬

風險與報酬之間的關係緊密相連，超額報酬正是來自承擔額外風險所獲得的補償。一般來說，所謂曝險（exposure）即指資產組合價值對於風險變動因素的敏感度（sensitivity），表示風險因素改變對價值所造成的影響。

一、拆解影響債券價格變化因素

牽動債券報酬變化的風險因子主要有：(1)時間（time），(2)殖利率（yield），(3)信用利差（credit spread）及(4)匯率（FX）。各項風險因子對於不同特性債券有不同的影響，連帶產生不同的價格反應，意味著各種類型債券間敏感程度有所差異。透過債券價格對風險因子的敏感性—當風險因子細微變動一單位引發價格的變動量，可觀察債券的曝險情況。債券的每個風險都有其評估的方式，以下依序說明，利用債券價格公式對各項風險因子進行偏微分（partial derivative）所推導出相對應的曝險衡量指標。

（一）時間

時間變動會影響債券收益。債券有兩個和時間相關的特性：第一，有固定的利息收入保護，繼續持有即能獲得穩定的報酬，不受市價波動影響；第二，隨著越接近到期期間，債券的價值也將逐漸貼近票面金額。持有期間收益（carry）即用來表示債券隨時間推進而賺取的報酬，並以到期殖利率（yield to maturity）作為衡量時間敏感度的曝險指標。對時間（t）進行偏微分觀察對債券投資組合的影響，如下列公式：

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{1}{V(t,y)} \underbrace{\frac{V(t+\Delta t, y) - V(t,y)}{\Delta t}}_{\approx \frac{\partial V(t,y)}{\partial t}} \Delta t \approx y \Delta t$$

（二）殖利率

根據債券評價模式，價格主要隨殖利率變動而變化，因此在進行投資組合分析時，深入探討殖利率曲線動態變化對債券價格造成的影響至關重要。在實務上，衡量殖利率曲線敏感度可細分為三項指標—修正後存續期間（modified duration）、關鍵利率存續期間（key-rate duration）及凸性（convexity）。

1. 修正後存續期間

首先，將債券評價公式透過泰勒展開（Taylor expansion）後，對殖利率進行偏微分，便可推導出下公式：

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{1}{V(t,y)} \underbrace{\frac{V(t,y+\Delta y)-V(t,y)}{\Delta y}}_{\approx\frac{\partial V(t,y)}{\partial y}} \Delta y \approx -D\Delta y$$

其中，修正後存續期間（D）即代表債券價格對殖利率的敏感度，用來估算每當殖利率微幅變動一個百分比時，債券價格將變動的百分比。

2. 關鍵利率存續期間

使用修正後存續期間估算債券價格敏感度時，是假設整條殖利率曲線以平行方式移動，然而實際上，不同期間的殖利率變動情況並非一致，各天期利率的走勢不盡相同，因此必須考慮殖利率非平行式的改變。關鍵利率存續期間是假定殖利率曲線上之某天期殖利率微小變動，其他天期殖利率維持不變，進而推算債券債格的變化。實務運作上可依照需求將殖利率曲線分為不同期間區段，接著自訂區段內的關鍵利率，並針對各關鍵利率作偏微分，推導出下列公式：

$$\begin{aligned}\frac{\Delta V}{V} &= \frac{1}{V(t,y_1,\ldots,y_N)} \frac{\overbrace{V(t,y_1,\ldots,y_k+\Delta y_k,\ldots,y_N)-V(t,y_1,\ldots,y_N)}^{\Delta V}}{\Delta y_k} \Delta y_k \\ &\approx \frac{1}{V(t,y_1,\ldots,y_N)} \frac{\partial V(t,y_1,\ldots,y_N)}{\partial y_k} \Delta y_k \approx -D_k \Delta y_k.\end{aligned}$$

其中，D_k即關鍵利率存續期間，用來衡量價格對各天期關鍵利率的敏感度指標。利用D_k能清楚辨識出特定期間利率的變動對於投資組合的影響，更有效掌握整體組合曝險情況。

3. 凸性

值得注意的是，債券價格和殖利率的關係是非線性的，因此當殖利率變動幅度加大時，若僅以線性關係為假設基礎的修正後存續期間估計價格，可能會與真實價格有相當大的誤差，因此需對殖利率再次微分，用來表示修正後存續期間的敏感程度。凸性（C）即為債券價格對殖利率的二次微分，推導出的數學式為：

$$\begin{aligned} C &= \frac{1}{V(t,y)}\frac{\partial^2 V(t,y)}{\partial y^2} \\ &= \frac{1}{V(t,y)}\frac{1}{(1+y)^2}\sum_{j=1}^{n}\frac{(T_j-t)(T_j-t+1)c_{T_j}}{(1+y)^{T_j-t}} \end{aligned}$$

凸性越大代表債券價格與殖利率關係曲線彎曲程度較大，當殖利率下跌時，高凸性債券漲幅較多，相反的，殖利率上漲時跌幅較小，具有漲多跌少的特性。

（三）信用利差

信用等級不同的債券，在報酬上也會有所差異。可將殖利率 y 拆分為代表無風險的相同天期公債殖利率（equivalent sovereign yield）及信用利差（credit spread），分別以 ŷ 及 s 透過數學式表達：

$$V(t,y) = V(t,\hat{y},s) = \sum_{j=1}^{n}\frac{c_{T_j}}{(1+\underbrace{\hat{y}+s}_{y})^{T_j-t}}$$

同樣地，針對信用利差（s）作偏微分，以瞭解信用利差對債券價格的影響，如下列：

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial V(t,\hat{y},s)}{\partial s} &= \frac{\partial}{\partial s}\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{c_{T_j}}{(1+\hat{y}+s)^{T_j-t}}\right), \\
&= -\frac{1}{(1+\underbrace{\hat{y}+s}_{y})}\sum_{j=1}^{n}\frac{(T_j-t)\,c_{T_j}}{(1+\underbrace{\hat{y}+s}_{y})^{T_j-t}}, \\
&= \underbrace{-\frac{1}{(1+y)}\sum_{j=1}^{n}\frac{(T_j-t)\,c_{T_j}}{(1+y)^{T_j-t}}}_{\frac{\partial V(t,y)}{\partial y}}.
\end{aligned}
$$

將該式左右兩邊同時除以價格，便求得信用利差存續期間（spread duration），以D_S表示債券報酬對信用利差變動的敏感度：

$$
\frac{\Delta V}{V} = \frac{1}{V(t,\hat{y},s)}\underbrace{\frac{V(t,\hat{y},s+\Delta s)-V(t,\hat{y},s)}{\Delta s}}_{\approx\frac{\partial V(t,\hat{y},s)}{\partial s}} \approx -D_S\Delta s
$$

（四）匯率

當投資以外幣單位計價的債券時，需將匯率波動造成折算回本國貨幣的匯兌損益列入考量，因此對匯率（E）進行偏微分，以評估外匯曝險（FX exposure）程度，數學公式如下：

$$
\frac{\partial V^*(t,y,\mathbf{E})}{\partial \mathbf{E}} = V(t,y)
$$

總結前述，掌握驅動債券價格的風險因子後，可將報酬率拆解成五項收益來源：(1)持有期間收益（carry return），(2)殖利率曲線收益（curve return），(3)凸性收益（convexity return），(4)信用利差收益（credit spread return），(5)匯率收益（FX return），建構出債券報酬率運算式如下所示：

$$
r^* \approx \overbrace{\underbrace{y\Delta t}_{\substack{\text{Carry}\\\text{return}}} - \underbrace{\sum_k D_k\Delta y_k}_{\substack{\text{Curve}\\\text{return}}} - \underbrace{D_S\Delta s}_{\substack{\text{Credit}\\\text{return}}} + \underbrace{\frac{1}{2}C(\Delta y)^2}_{\substack{\text{Convexity}\\\text{return}}}}^{\text{Local currency return}} + \underbrace{\mathbb{I}_{FX}\left(\frac{\Delta E}{E}\right)}_{\text{FX return}}
$$

債券報酬率即為各項報酬來源之總和。其中，報酬來源可進一步拆分為曝險指標與風險因子變動量相乘，以數學公式表達：

$$\text{Return to } i\text{th Factor} = \text{Exposure}_i \cdot \text{Change in } i\text{th Factor}_i$$
$$\text{Total Return} \approx \sum_i \text{Return to } i\text{th Factor}.$$

$$\text{Carry return} = \text{殖利率(y)} \times \text{時間變動}(\Delta_t)$$

$$\text{Curve return} = -\text{修正後存續期間(D)} \times \text{約當公債殖利率變動}(\Delta_{yTRE})$$

$$\text{Convexity return} = \text{凸性}(C)/2 \times \left(\text{殖利率變動}(\Delta_y)\right)^2$$

$$\text{Credit return} = -\text{信用利差存續期間}(D_s) \times \text{信用利差變動}(\Delta_S)$$

$$\text{FX return} = \text{匯率變動率}(\Delta E/E)$$

茲將報酬率來源、風險因子及曝險指標整理如下：

報酬來源	風險因子	曝險指標	定義
持有期間收益	時間	到期殖利率	$\frac{1}{V}\frac{\partial V}{\partial t}$
殖利率曲線收益	殖利率	修正後存續期間	$\frac{1}{V}\frac{\partial V}{\partial y}$
		關鍵利率存續期間	$\frac{1}{V}\frac{\partial V}{\partial y_k}$
凸性收益		凸性	$\frac{1}{V}\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}$
信用利差收益	信用利差	信用利差存續期間	$\frac{1}{V}\frac{\partial V}{\partial s}$
匯率收益	匯率	匯率曝險	$\frac{1}{V}\frac{\partial V}{\partial E}$

二、建構債券投資組合報酬率公式

為評估整體債券投資組合報酬率，需考量組合內個別債券市值占全部資產總市值之比重，以$\omega_i = (t)$表達權數，將加權平均後的報酬率公式調整如下：

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{N}\omega_i(t)r_i}_{r_p} \approx \underbrace{\sum_{i=1}^{N}\omega_i(t)y_i\Delta t}_{\text{Carry}} - \underbrace{\sum_{i=1}^{N}\omega_i(t)\sum_{k=1}^{n}D_{i,k}\Delta y_{i,k}}_{\text{Curve}} - \underbrace{\sum_{i=1}^{N}\omega_i(t)D_{i,S}\Delta s_i}_{\text{Credit}} +$$
$$\underbrace{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\omega_i(t)C_i(\Delta y_i)^2}_{\text{Convexity}} + \underbrace{\sum_{i=1}^{N}\omega_i(t)\mathbb{I}_{FX_i}\left(\frac{E_{i,t+1}-E_{i,t}}{E_{i,t}}\right)}_{\text{FX}}$$

肆、 探討債券投資績效

一、績效衡量期間有存入或提取資金情況

評估投資表現時，須考量期間內有存入或提取資金的情況以調整收益率的計算。實務上有兩種常見的估計方式：資金加權收益率（money weighted return）及時間加權收益率（time weighted return）。兩者的區別在於關注的重點不同，資金加權著重在期間內每筆現金流量對報酬作出的貢獻；時間加權則著眼於期間內時間的連續性，聚焦在資金的時間複利價值。

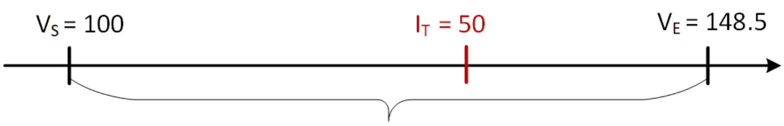
（一）資金加權收益率

Modified Dietz 法是資金加權收益率計算的一種，按照每筆資金存在的時間加權以調整期初資產價值，數學公式如下列：

$$r^{\mathrm{MD}} = r_{S,E}^{\mathrm{MD}} = \frac{V_E - V_S - I_T}{V_S + \frac{E-T}{E-S} \cdot I_T}$$

其中，V_E = 期末資產價值、V_s = 期初資產價值、I_T = 第T日的資金淨變動、$\frac{E-T}{E-S}$ = 第T日資金淨變動存續天數占整段期間的權重。

舉例來說，期初資產價值=100，在三分之二的時間投入資金=50，期末資產價值=148.5，利用 Modified Dietz 計算的收益率為：



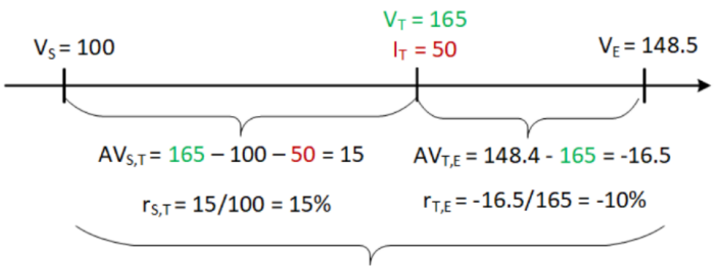
$$r^{MD} = \frac{148.5 - 100 - 50}{100 + \frac{1}{3} \times 50} = -1.29\%$$

（二）時間加權收益率

時間加權法是一種幾何平均收益率的概念，可以將其理解為期初的投入一直持續到期末所累積的複利價值，因此，需在每個資金淨變動的時間點評價投資組合以維持收益率計算的連續性，且假設資金淨變動均發生於該期間的期末。公式如下列所示：

$$r^{TW} = r^{TW}_{S,E} = \underbrace{(1 + r_{S,T})}_{=\frac{V_T - V_S - I_T}{V_S}} \cdot \underbrace{(1 + r_{T,E})}_{\frac{V_E - V_T}{V_T}} - 1$$

舉例說明，期初資產價值=100，期間投入資金=50，該期間資產價值=165，期末資產價值=148.5，計算時間加權收益率為：



$$r^{TW} = (1 + 15\%) \times (1 - 10\%) - 1 = 3.5\%$$

至於該如何選擇報酬率的計算方法端視衡量績效的目的而定。BIS 建議，對代為操作的投資組合經理人來說，並無法決定每個時間點資金進出狀況，因此利用時間加權收益法評估其績效表現較為合適；若能確實掌控每個時點的現金流情況，透過 Modified Dietz 法，可更瞭解每筆資金流量對整體報酬率的影響。

二、單一債券投資標的實例分析

茲舉例說明對債券報酬率進行細部拆解及分析。假設現持有一以美元計價之加拿大債券，票面利率為 3.3%，每半年付息一次，到期日為 2028 年 3 月 15 日，2 月底及 3 月底的債券市場資訊整理如下：

	2023/2/28	2023/3/31	差異
殖利率	2.16%	2.74%	0.58%
USD/CAD匯率	1.2675	1.2505	-0.017
含息價格	$107.92	$103.19	-$4.72
信用利差（*bps.*）	39	29.2	-9.8
同年期公債殖利率	1.77%	2.45%	0.68%
年期	6.05	5.96	-0.08
修正後存續期間	5.41	5.38	-0.02
信用利差存續期間	5.41	5.38	-0.02
凸性	34.2	33.3	-0.9
天數		31	

（一）月報酬率

$$\frac{1.2505 \times (103.19 + 1.65) - 1.2675 \times 107.92}{1.2675 \times 107.92} = -415.7 \ \ bps.$$

（二）持有期間報酬

$$2.16\% \times \frac{31}{365} = 18.4 \ \ bps.$$

① 依分析目的不同，可拆分為票息報酬（coupon return）及貼近面額報酬（pull-to-par return）。

票息報酬 ＝ $3.3\% \times \frac{31}{365} = 28.0 \ \ bps.$

貼近面額報酬 ＝ $(2.16\% - 3.3\%) \times \frac{31}{365} = -9.6 \ \ bps.$

② 或可拆分為無風險利率持有期間報酬（risk-free carry return）及信用貼水持有期間報酬（credit carry return）。

無風險利率持有期間報酬 ＝ $1.77\% \times \frac{31}{365} = 15.1\ \ bps.$

信用貼水持有期間報酬 ＝ $(2.16\% - 1.77\%) \times \frac{31}{365} = 3.31\ \ bps.$

（三）殖利率曲線報酬

$$-5.41 \times 0.68\% = -365.4\ \ bps$$

可進一步利用先前介紹的關鍵利率存續期間或 Nelson-Siegel 模型對殖利率曲線進行細項分解，以清楚分辨報酬率變動的原因，獲得更完整的資訊。

① 關鍵利率存續期間

各關鍵利率年期	對報酬率貢獻（*bps.*）
2.5	-8
3	-6
4	-9
5	-184
7	-159
10	0
合計	-365.4

由於持有債券的存續期間為 6.05 年，因此殖利率曲線報酬-365.4*bps.*主要是受到 5 年期及 7 年期殖利率變動影響。

② Nelson-Siegel 模型

	對報酬率貢獻（*bps.*）
水平	-247
斜率	89
曲度	-208
合計	-365.4

藉由模型可知，水平移動及曲度變化是造成殖利率曲線變動的最大因素，兩者對殖利率曲線報酬產生負貢獻。

（四）凸性報酬

$$\frac{34.2}{2}\times(0.58)^2 = 5.7 \ \ bps.$$

（五）信用利差報酬

$$-5.41\times -9.8 = 52.9 \ \ bps.$$

（六）匯率報酬

$$\frac{1.2505-1.2675}{1.2675} = -134.1 \ \ bps.$$

將拆解為各細項的報酬率彙總如下：

報酬率來源	對報酬率貢獻（*bps.*）	
無風險利率持有期間報酬	12.3	
信用貼水持有期間報酬	9.1	
持有期間報酬合計		18.4
水平	-247	
斜率	89	
曲度	-208	
殖利率曲線報酬合計		-365.4
凸性報酬		5.7
信用利差報酬		52.9
匯率報酬		-134.2
殘差		6.8
以CAD計價之月報酬率		-415.7

三、債券投資組合實例分析

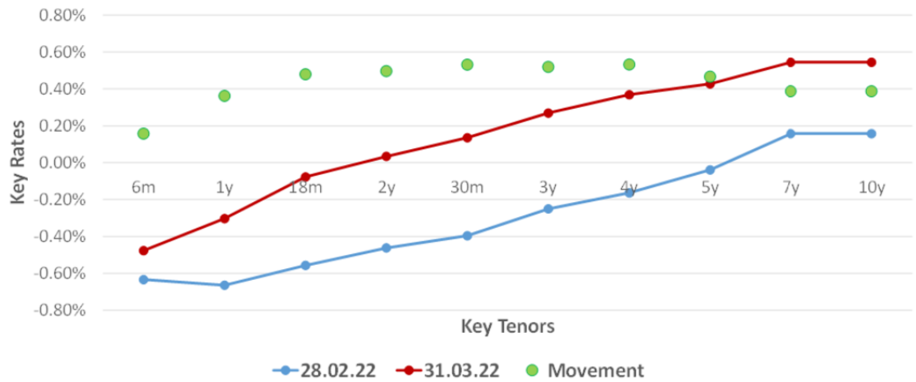
如同單一債券的細部分析，差別僅在於需考量組合內個別債券市值占整體之權重，加權調整各細項報酬率。以下為標竿指數及投資組合分別包含的債券資訊：

Characteristic	Benchmark	Portfolio
Number of Securities	255	6
Tenor (years)	4.86	4.66
Yield	0.17%	-0.09%
Equivalent Treasury Yield	-0.25%	-0.20%
Credit Spread (bps.)	42.1	8.4
Modified Duration	4.63	4.63
Spread Duration	4.63	4.63

分析結果彙總如下：

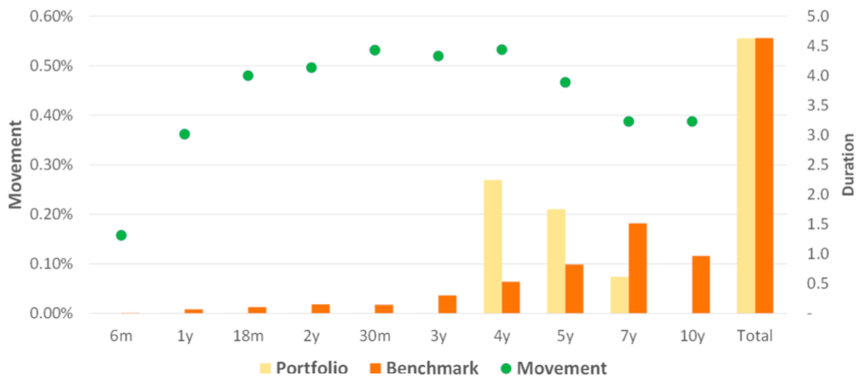
Return Type	r_p	r_b	r_a
Risk-free Carry	-1.7	-2.1	0.4
Spread Carry	0.9	3.6	-2.7
Carry Return	-0.8	1.4	-2.2
6M, 1y, 18m, 2y, 30m	0	-18	18
3Y	0	-15	15
4Y	-115	-27	-88
5Y	-94	-44	-50
7Y	-28	-70	42
10Y	0	-37	37
Total Curve Return	-237.9	-212.3	-25.6
Spread	11.5	33.3	-21.8
Convexity	3.2	2.4	0.8
Residual	4.1	3.2	0.9
Total Return (actual)	-219.9	-171.9	-48.0

圖 5 各年期關鍵利率走勢圖



資料來源：Gehlen (2023)

圖 6 投資組合與標竿指數各年期曝險部位



資料來源：Gehlen (2023)

由分析結果可知，殖利率曲線報酬及信用利差報酬是投資組合績效表現不如標竿指數的原因。進一步利用相關資訊深入探討發現，（1）從市場殖利率曲線變化可看出，4 年期至 5 年期利率上升幅度較大，恰好是投資組合的主要曝險部位，因此產生較差的負貢獻，如圖 5 及圖 6；（2）在信用利差方面，投資組合並未配置西班牙及義大利的債券，因此無法獲得於來自兩國信用利差收斂帶來價格漲幅，如圖 7 及圖 8。

圖 7 投資組合與標竿指數投資區域配置比例

Issuer	Portfolio (%)	Benchmark (%)	Δ (%)
Netherlands	30.0	4.4	25.6
Germany	40.0	17.7	23.3
France	30.0	25.2	4.8
Other Countries	0.0	52.7	-52.7
Total	**100.0**	**100.0**	**0.0**

資料來源：Gehlen (2023)

圖 8 投資組合與標竿指數信用利差報酬分析

Spread Return	r_p	r_b	r_a
Germany	-0.1	0.1	-0.2
Spain	0.0	9.3	-9.3
France	7.0	5.2	1.8
Italy	0.0	13.3	-13.3
Netherlands	4.7	0.7	4.0
Portugal	0.0	1.6	-1.6
Other Countries	0.0	3.2	-3.2
Total Spread Return	11.5	33.3	-21.8

資料來源：Gehlen (2023)

伍、 心得與建議

一、研習心得

（一）透過調整資產組合權重，有效掌控投資風險

設計投資組合的基本原則，在於考量自身的投資需求、資產類別偏好、時間長短及風險承受力等，挑選適合標的種類，並決定內部分配比例，建構出能有效達成投資目標的資產組合。由於不同類型的資產項目都有各自的風險屬性，可藉著調整部位結構，將投資組合的整體風險控制在可接受的範圍內。

（二）瞭解分析歷史數據的重要性，有助於判斷未來趨勢

風險通常被定義為損失的可能性，相較於報酬而言，投資所面臨的風險並不容易被精確估算。然而，盡可能搜集較長時間的重要歷史數據，進行長期觀察與分析，將有助於辨識潛藏其間的風險所在，據以判斷未來趨勢。此外，BIS 分析師提醒，由於價格變化是隨機（random）出現的結果，利用歷史紀錄歸納出各類型資產表現僅足以作為未來風險指標，並無法預測未來報酬。同時須注意市場可能存在波動群聚的現象（volatility cluster），亦即波動具有延續性，一股波動將帶動另一股波動。

二、研習建議

（一）外匯存底操作首重流動性與安全性，宜採穩健策略

投資的本質在於幫助達成各階段重要的財務目標，而於未來每段期間所期望的現金流量型態，是決定資產配置策略重要因素。本行依法每年應編列盈餘繳庫預算目標，獲取穩定的報酬便成為擬定投資計畫時的首要考量。為因應特定期間

資金需求，勢必面臨短期市場波動性，宜採取謹慎的投資操作，俾降低財務成果的不確定性。

由於各種投資商品的類型有不同風險特徵，在報酬與風險之間必須有所取捨。對本行而言，以能夠提供一定程度流動性和安全性較佳的低風險資產為優先標的，為相對妥適的投資組合配置。

（二）持續充實財務相關知識，有助提升投資決策品質

沒有人可以精準預測未來。面對這樣的不確定性，惟有掌握更豐沛的知識，才能創造最有利的局面。建議可藉由(1)熟悉基本財務理論，(2)研讀市場歷史發展，(3)蒐集當前重要經濟數據，來建構投資邏輯。透過充分運用可取得的資源，針對細節研究並判讀現況，以增進辨別景氣位階及風險所在的能力，並根據重點趨勢調整投資部位。當擁有越深厚的財務知識，就能對未來預作更充足的準備，進而提升投資決策品質。

參考資料

官佳璿（2007），「三因子公債殖利率曲線模型探討」，中央銀行公務出國報告。

游璧毓（2013），「固定收益商品之投資組合分析」，中央銀行公務出國報告。

葉峻源（2016），「參加 BIS 投資組合分析研討會心得報告書」，中央銀行公務出國報告。

鍾秉諺（2016），「印尼央行與英國央行共同舉辦之總體金融模型建構與分析訓練課程」，中央銀行公務出國報告。

鄭文欽（2017），「BIS 投資組合分析研討會」，中央銀行公務出國報告。

蔡錦堂、林容如（2022），「債券市場」，台北市：中華電視股份有限公司。

財團法人證券暨期貨市場發展基金會（2022），「債券市場理論與創新」，台北市：證期會。

Gehlen, W. (2023),”Interest Rates and Curve Fitting: Key Concepts and Techniques,” *BIS Portfolio Analytics Workshop*, June.

Gehlen, W. (2023),”Exposure for Bonds: Fixed Coupon Bonds,” *BIS Portfolio Analytics Seminar*, June.

Gehlen, W. (2023),”Performance Attribution: Allocating Return to Risk Factors,” *BIS Portfolio Analytics Seminar*, June.

Gehlen, W. (2023),”Measuring the Uncertainty of Return: Without (too many) equations,” *BIS Portfolio Analytics Workshop*, June.

Gehlen, W. (2023),”Measuring the Uncertainty of Return: Computation of a TE estimate,” *BIS Portfolio Analytics Workshop*, June.