[鍵入文字]

出國報告(出國類別：國際會議)

參加英國"可積性，特殊函數及組合學"國際專題討論會

(科技部計劃編號：NSC 107-2115-M-606-001)

服務機關：國防大學理工學院資工系
姓名職稱：文職教授張仁煦
派赴國家：英國
報告日期：2019/07/9
出國時間：2019/06/21-2019/06/30

摘要:

利用科技部補助(NOST 107-2115-M-606 -001)前往英國參加國際學術會議。針對 此次國際會議提出個人心得報告。此會議之主要目地在於發表修正化KP 方程式 (Modified KP equation) 中的共振理論及研究彎曲孤立波及直線形孤立波之間的交互 作用。發表的重點在於如何利用雷圖形(Le-Diagram)研究共振現象。經由雷圖形，吾人可精確描述當時間趨近正負無限時，彎曲孤立波及直線形孤立波之間的交互作用之情形。透過知識交換，讓數學家及物理學家了解彼此理論。

目次

壹、目的 1

貳、過程 2

叁、心得報告 6

肆、建議事項 10

伍、附錄 11

目的:

參與國際學術交流以充實本職學能。並希望能將理論與實際結合，了解數學模型與孤立波共振架構之間的關係，尤其是彎曲孤立波與線形孤立波的共振模型之研究，利用代數幾何表示其架構是研究重點。

過程:

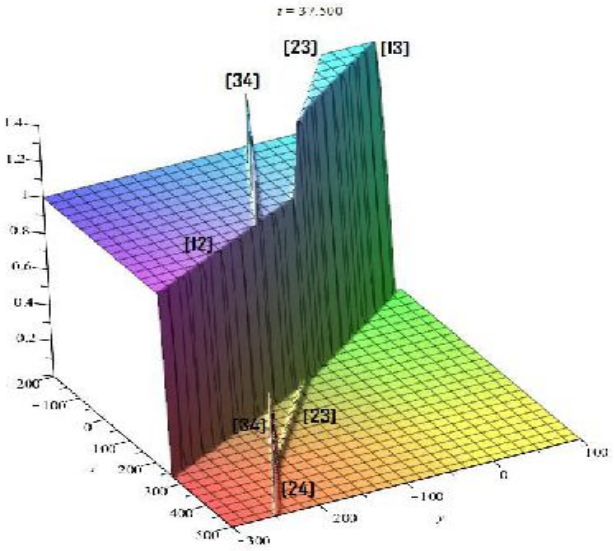
利用科技部補助(MOST 107-2115-M-606-001)前往英國格拉斯哥市參加國際學術會議。筆者於 6 月 21日由台北搭乘阿聯酋航空飛機到杜拜轉機，再搭乘阿聯酋航空至目的地格拉斯哥市。

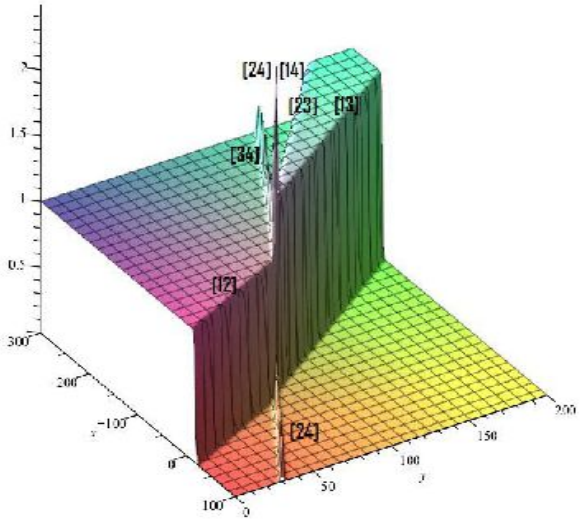
此次會議主要目的是發表修正化 KP-(II) (Modified KP)方程式中的孤立波(Solitonic Waves) 共振理論。 此為一系列之研究。利用幾何學中完全非負的格拉斯曼流形(Totally Non-negative Grassmannian)理論， 吾人研究修正性KP-(II)方程式的共振理論。 我們利用Tau函數及Bitnet-Cauchy公式以建構修正性KP-(II)方程式多重彎曲孤立波解， 然後研究彎曲孤立波(Kink Soliton)及直線形孤立波(Line Soliton) 之間的交互作用。利用 Tau-函數表現中朗斯基行列式理論, 吾人研究用雷圖形以描述彎曲孤立波 及線形孤立波之共振架構. 雷圖形是指在楊氏圖形的每個框框中填入 + 或 O, 並具有雷性質: 在每個 O 的上方及左方不能同時有 +. 在 KP 方程式中, 吾人使 用雷圖形以描述線形孤立波的共振架構. 然而在修正化 KP 方程式中, 由於彎曲 孤立波的存在而不同. 吾人發現, 給定一個非負的格拉斯曼流形上的不可化約 的舒伯特元素, 其彎曲孤立波共振架構可由其所對應的兩個雷圖形加以重疊而 成. 吾人研究完全非負的格拉斯曼流形Gr(4,2)，共有 7 種型態， 其中最為有趣的是Mach 型。 其所對應的非負的格拉斯曼流形為下列2×4矩陣:

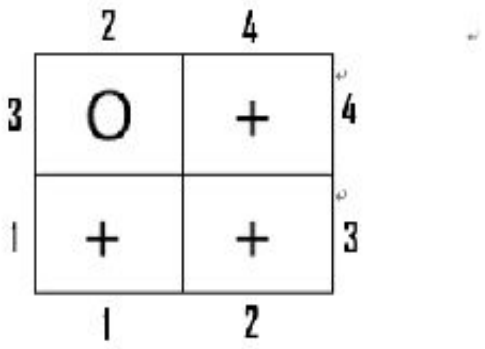
$$\begin{bmatrix} 1 & a & 0 & -c \\ 0 & 0 & 1 & b \end{bmatrix}$$

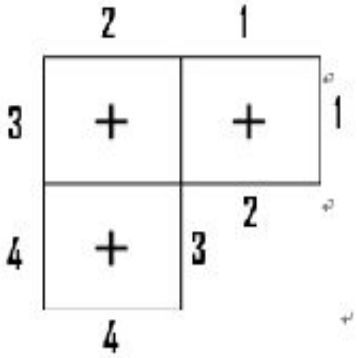
此處 a，b ，c 皆為正數。

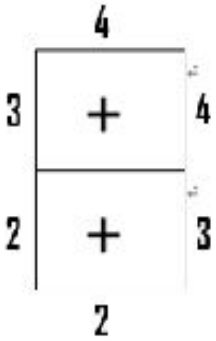
我發表的重點在於如何利用雷圖形(Le-Diagram)研究共振現象，尤其是彎曲孤立波及直線形孤立波之間的交互作用。在 **KP** 方程式中，吾人使用雷圖形以描述線形孤立波的共振架構。 然而在修正化 **KP** 方程式中，由於彎曲孤立波的存在而不同。吾人將利用雷圖形以描述彎曲孤立波及線形孤立波之共振架構。 如下所示，上圖為 Mach 型彎曲孤立波及線形孤立波之共振架構 。下圖為使用雷圖形以描述 Mach 型線形孤立波的共振架構。其他 **6** 種雷圖形以描述線形孤立波的共振架構皆於會議中發表。描述當時間趨近正負無限時，彎曲孤立波及直線形孤立波之間的交互 作用之情形。其中關鍵部份在於先畫出彎曲孤立波在時間趨近正無限時的雷圖形，然後畫出線形孤立波在時間趨近正無限時的雷圖形，然後將兩圖形加以重疊。最後，利用彎曲孤立波在時間趨近正無限時的雷圖形，畫出彎曲孤立波在時間趨近負無限時的雷圖形，再與線形孤立波在時間趨近負無限時的雷圖形加以重疊。發表的重點在於如何畫出彎曲孤立波在時間趨近正無限時的雷圖形。

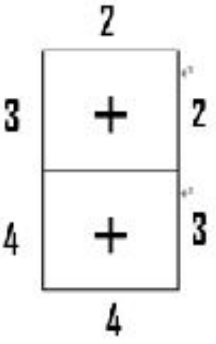

[23]
[13]
[34]
[12]
[34]
[23]
[24]


[24]
[14]
[23]
[13]
[34]
[12]
[24]


2
4
3
O
+
4
1
+
+
3
1
2


2
1
3
+
+
1
2
4
+
3
4


4
3
+
4
2
+
3
2


2
3
+
2
4
+
3
4

6月24日: 第一天大會主要演講內容如下

主要是介紹幾何學與可積系統的關係。其主要論點是在於給定一個 流型 (manifold)，在此流型上，如何尋求一個"好的"度量 (metric) "? 給定一個"度量"，吾人即可定義測地流(geodesic flow)，亦即兩點間最短距離。所謂"好的"意思是指可利用可積性(integrability)加以刻劃。有名的例子就是 2 維流型中的均勻化定理 (Uni-formization Theorem) ，由此定理可將黎曼曲面(Riemann's surface)與複變數函數論中的自守函數(auto-morphic functions) 關聯在一起。而此自守函數會符合所謂的Picard-Fuchs 方程式。在此黎曼曲面的 Ricci flow 也有孤立波解(soliton)。

6月25日: 第二天大會主要演講內容如下:

主要是非交換型可積分方程式的孤立波解 (Non-communicative solitons)。非交換是指時空導數的非交換性，其基本想法來自於量子力學。此類孤立波解是利用所謂的擬行列式 (quasi-determinant)。擬行列式與行列式不同之處是其各項（entry）相乘不具交換性，因此必須修正行列式之定義，但必須有行列式之基本性質，例如非常重要的 Jacobi identity。 利用擬行列式，吾人可解決非交換的 楊-密爾斯反自對偶方程式 (Yang-Mills anti-self-dual equation)，此方程式重要原因是很多孤立波方程式是它的化約 (reduction)。

6月26日: 第三天大會主要演講內容如下:

主要是集中於聚集代數（Cluster algebra)之研究。聚集代數是起源於某類格拉斯曼流型 (Grassmannian) 之研究，例如完全非負的(totally non-negative)。在一群的代數方程式中，吾人要找出關鍵的幾個元素，使得其餘元素可由這些關鍵元素以有理式表示(無根號)，但是此有理式表示必須具備所謂的勞倫茲性質(Laurent property)，也就是分母無加法，全部皆為乘法。此聚集代數為一新興的數學架構，引起眾人興趣。

6月27日: 第四天大會主要演講內容如下:

主要是研究天界型的(heavenly type)可積分方程式，此類可積分方程式是起源於愛因斯坦自對偶方程式 (Einstein's self-dual equation) ，屬於無耗散型的 (dispersionless) 可積分方程式，其特性是其解常常是多值的，也就是會彎曲打折。研究的重點是如何將其推廣至任意偶數的維度。其關鍵的步驟在於構造出交換型的向量場(vector fields)，但是此類向量場 要具有譜參數(spectrum parameters)，較為特殊的。

心得報告:

這次會議最大的收穫就是可積分模型在數學中的角色， 這是因為主辦單位是數學系。而我的修正性KP-(II)方程式也有幾何架構。會議過程中與會的學者們與演講者利用休息時間進行著討論，交換彼此的想法，也從中看到了一些有趣的值得研究的題材來。

這次會議也與下列與會者有較為深入之交談:

(1) Prof. Claire Gilson:: 她是大會的主辦人之一。她也是研究非交換型可積分方程式的孤立波解之創造者之一，尤其是在利用非交換型的達布轉換(Darboux Transformation)以建構多個孤立波解。事實上，擬行列式理論比非交換型可積分方程式早 70 年提出，如何將其利用於非交換型可積分方程式是一個值得思考的問題。我主要是問她關於擬行列式為何如此定義，因為在交換情形下，無法回到行列式定義。以及若有某些項目為零時，該如何定義 ？ 她皆親切回答，但有些部份並非聽得懂，因為非交換代數本身就是困難的課題。其實我的動機也是想將共振理論推廣至非交換型可積分方程。但是牽涉到格拉斯曼流型就沒那麼容易。

(2) Prof. Jing-Ping Wang : 她是英國肯特(Kent)大學的教授。她這次談到 2+1 維的週期性的 Volterra 系統。這個系統較為複雜，在特殊極限情形下，此系統可得到 KP-I 方程式。2+1 維的週期性的 Volterra 系統之化約 (reduction)理論要

用到非交換群理論，因此它的孤立波架構較為複雜，要用到迴圈群(Loop Group)及利用修飾法 (Dressing Method)來建構孤立波。這時就要用到矩陣理論以建構有趣的孤立波。在她所構造的網狀孤立波 (web solitons)也有 Y 型的共振架構，但是她只是描繪圖形卻沒有利用原本的格拉斯曼流型的理論架構。這是我們共同的興趣。此外，我有問她這些網狀孤立波的波前速度 (wave front speed) 要如何求 ？ 有解釋給我聽。我覺得可以跟她有進一步合作，但是先要把她們的孤立波架構弄清楚。

(3) Prof. K. Maruno: 他是研究可積分方程數值方法。在本次論文發表中，他所提出的數值方法是用來描繪迴圈孤立波 (loop soliton)及其之間的交互作用。此種可積分方程式稱之為 WKI 系統 (1+1 維) 。有趣的部份在於此 WKI 系統可透過一個反置轉換 (Reciprocal Transformation)，經由 MKdV 方程式而得到。而我這次所發表的 MKP 方程式正好是 MKdV 方程式的 (2+1 維) 推廣。所以很自然我就問他是否有 WKI 系統 (2+1 維)的推廣 ？ 他想一想，但不確定。其實，我的動機也是想把 MKP 方程式的共振理論衍生至迴圈孤立波。後來我私下和他討論 MKP 方程式的共振理論，討論的焦點是集中在格拉斯曼流型的理論架構。

研討會讓筆者收穫良多，不但可以見識到各個國家的學術研究者提出的種種值得學習的創意、巧妙的研究方法。而如何適當的分析與建構模型去描述這些自

然現象，是我們相關領域研究者努力的目標.

肆、建議事項:

在這次會議中，認識到一些英國科學家， 希望能促進雙方學術交流。

伍、會議資料

與會圖片二張

by
W.K. Schief
New South Wales, Sydney