出國報告(出國類別：國際會議)

參加俄羅斯"聖彼得堡 2018年繞射日國際研討會"

(科技部計劃編號：NSC 106-2115-M-606-001)

服務機關：國防大學理工學院資工系
姓名職稱：文職教授張仁煦
派赴國家：俄羅斯
報告日期：2017/06/24
出國時間：2017/06/2-2017/06/10

摘要:

利用科技部補助(NOST 106-2115-M-606 -001)前往俄羅斯參加國際學術會議。針對 此次國際會議提出個人心得報告。此會議之主要目地在於發表修正化KP 方程式 (Modified KP equation) 中的共振理論及研究彎曲孤立波及直線形孤立波之間的交互 作用。發表的重點在於如何利用雷圖形(Le-Diagram)研究共振現象。透過知識交換，讓數學家及物理學家了解彼此理論。了解數學模型與孤立波共振架構之間的關係，利用代數幾何表示其架構是研究重點。 此次會議主要目的是發表修正化 KP-(II) (Modified KP)方程式中的孤立波(Solitonic Waves)共振理論。 利用幾何學中完全非負的格拉斯曼流形(Totally Non-negative Grassmannian)理論， 吾人研究修正性KP-(II)方程式的共振理論。 我們利用Tau函數及Bitnet-Cauchy公式以建構修正性KP-(II)方程式多重彎曲孤立波解， 然後研究彎曲孤立波(Kink Soliton)及直線形孤立波(Line Soliton) 之間的交互作用。在修正化KP方程式中，由於彎曲孤立波的存在而不同。吾人將利用雷圖形以描述彎曲孤立波及線形孤立波之共振架構。

目次

目的:

參與國際學術交流以充實本職學能。並希望能將理論與實際結合，了解數學模型與孤立波共振架構之間的關係，尤其是彎曲孤立波與線形孤立波的共振模型之研究，利用代數幾何表示其架構是研究重點。

過程:

利用科技部補助(MOST 106-2115-M-606-001)前往俄羅斯聖彼得堡參加國際學術會議。筆者於 6 月 2日由台北搭乘國泰航空飛機到香港，再搭乘瑞士航空到蘇黎世，最後搭乘瑞士航空轉機至目的地聖彼得堡。

此次會議主要目的是發表修正化 KP-(II) (Modified KP)方程式中的孤立波(Solitonic Waves) 共振理論。 利用幾何學中完全非負的格拉斯曼流形(Totally Non-negative Grassmannian)理論， 吾人研究修正性KP-(II)方程式的共振理論。 我們利用Tau函數及Bitnet-Cauchy公式以建構修正性KP-(II)方程式多重彎曲孤立波解， 然後研究彎曲孤立波(Kink Soliton)及直線形孤立波(Line Soliton) 之間的交互作用。吾人研究完全非負的格拉斯曼流形Gr(4,2)，共有 7 種型態， 其中最複雜為Toda 型。 其所對應的非負的格拉斯曼流形為下列2x4矩陣:

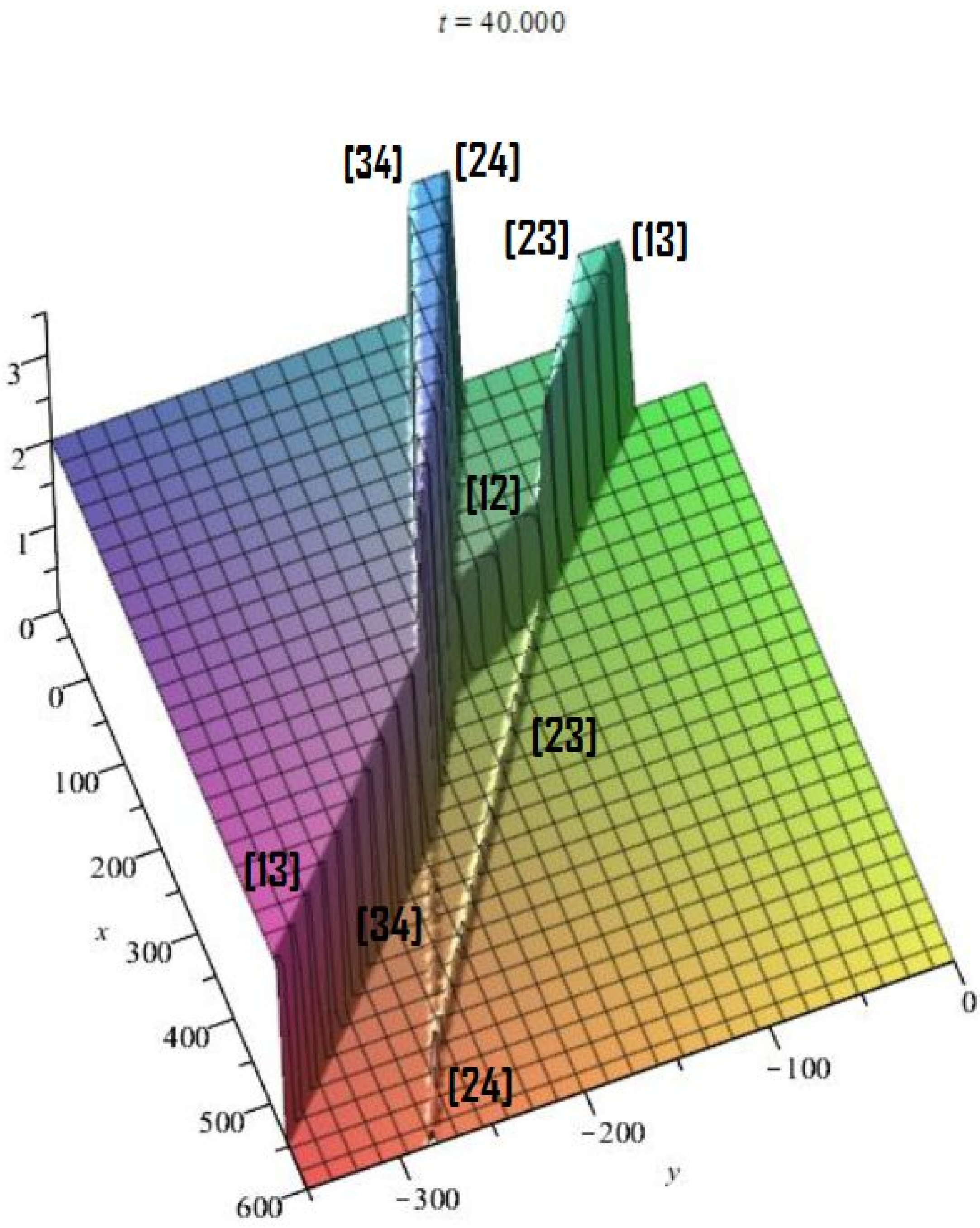
$$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & -\mathbf{c} & -\mathbf{d} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{a} & \mathbf{b} \end{bmatrix}$$

此處 a，b，c，d 皆為正數且 ad-bc >0。

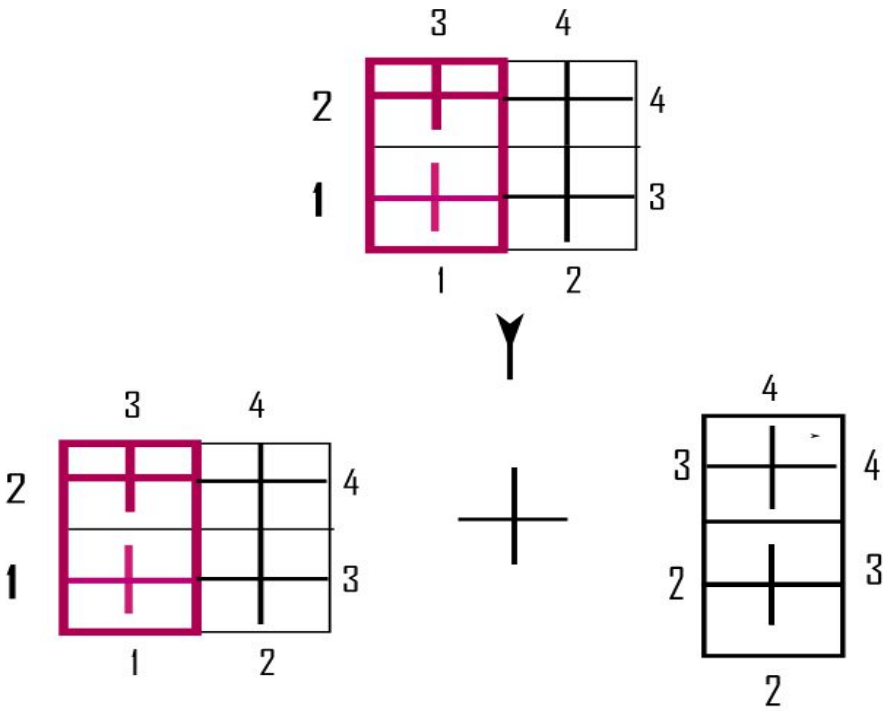
我發表的重點在於如何利用雷圖形(Le-Diagram)研究共振現象，尤其是彎曲孤立波及直線形孤立波之間的交互作用。雷圖形是指在楊氏圖形的每個框框中填入 + 或 O， 並具有雷性質: 在每個 O 的上方及左方不能同時有 +. 在 **KP** 方程式中，吾人使用雷圖形以描述線形孤立波的共振架構。 然而在修正化 **KP** 方程式中，由於彎曲孤立波的存在而不同。吾人將利用雷圖形以描述彎曲孤立波及線形孤立波之共振架構。 如下所示，上圖為 Toda 型彎曲孤立波及線形

孤立波之共振架構 。下圖為使用雷圖形以描述Toda 型線形孤立波的共振架構。

其他 **6** 種雷圖形以描述線形孤立波的共振架構皆於會議中發表。



$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$



最後，發表完畢時，有一位法國學者問我關於修正化 KP-(II) 方程式的解有另一種積分表示，是否有同樣結果 ? 我回答是相等，因為已有學者證明。另一位俄國學者問到到如何利用線性方程式建構孤立波解。我回應他說要用達部轉換(Darboux Transformation)。其精神在於用基本的位能(potential) 及其波函數(wave function) ，再建造出新的位能及其所對應的新的波函數。不斷的迭代，會產生更複雜的新的位能及其所對應的新的波函數。這方法在數學物理是常見的。

此次會議主要是研究物理中到處可見的折射(Refraction)現象及其數學架構。尤其是水波及電磁波理論。對我而言，我比較集中於問題描述，也就是數學模型。

重點在於邊界條件的描述以及數值模擬，即使是線形偏微分方程式也是複雜。

6月4日: 第一天大會主要演講內容如下

主要是在介紹波動中的荷莫茲方程式 (Helmholtz equation) ， 此線形偏微分方程式是用來描述光線在介質中傳遞的方式。 主題在兩個方向: 一個是邊界形狀的改變，則波將如何反射及折射，這都要複雜的特殊函數及數值計算。另一方向則是不同波形的傳輸，但要求穩定性，常見有 4 種類型。當然，也要複雜的特殊函數及其漸進展開式(Asymptotic expansion)，以討論光線的漸進行為。

6月5日: 第二天大會主要演講內容如下:

主要是研究水波中的交互作用及邊界行為。主要是利用布西內斯克類型方程式(Boussinesq-type model)來描述水波沿著斜面下滑時(波速突然增加)所產生的波動現象，也就是不會產生波型碎裂(Wave breaking)。這種現象稱為 unidular bores. 其用數值結果證明當 Froude number 越高，其振盪波型更尖銳且振幅更大。我問了一個問題說為何用布西內斯克類型方程式而非 KdV 類型方程式 ? 演講者回答說因為前者是雙向傳播而後者只有單向傳播。原來如此，這很重要。

6月6日: 第三天大會主要演講內容如下:

主要是以譜論方法(Spectrum method)研究幾何客體. 其理論是在流型(manifold)上

取拉普拉斯微分算子(Laplace operator)，再進而建構熱傳導算子(Heat operator)，然後研究其漸近展開式 (asymptotic expansion)，其結果是其展開項之係數對應到其幾何量，例如體積，總曲率(total scalar curvature)。

6月7日: 第四天大會主要演講內容如下:

主要是研究半古典格林函數(semi-classical Green's function)。稱為半古典是因為其相關格林函數之傅立葉轉換 (Fourier transformation)中，要放入普郎克常數，當此常數趨近於零時，其漸進行為常常表現出高度振盪行為 (Oscillatory integral)，例如WKB 分析。此總漸近分析常常要用到定態相法(Stationary Phase Method)。 其結論是此漸近分析分為三部份: 奇異項 (singular part)，過渡項(Transient part)及波動項(wave part)，各項皆有其積分表現方式。

6月8日: 第五天大會主要演講內容如下:

最後一天的主題是講漂流水中物體(可有洞)，如何計算其壓力及速度。這問題在數學家**F. John** 在**1950** 所提出。 其解最後化為去求解一個積分方程式。為了可解性，吾人要尋求適當的函數空間，如此才可利用 **Fredholm** 理論，證明存在性。但是在某些特殊物體邊界條件下**(Neumann's condition)**，此積分方程式無解。此演講之重點在於找出適當之邊界條件，使此積分方程式有唯一解。

心得報告:

這次會議最大的收穫就是可積分模型在折射物理模型的應用,我的修正性KP-(II)方程式也有這類折射架構。會議過程中與會的學者們與演講者利用休息時間進行著討論,交換彼此的想法,也從中看到了一些有趣的值得研究的題材來。

這次會議也與下列與會者有較為深入之交談:

(1) Prof. Slunyaev: 他是利用非線性薛丁格方程式研究深水波理論。他的研究興趣在於瘋狗浪(Rogue waves)及其成因:。他是利用反散射理論(Inverse Scattering Theory) 應用在樣本之局部行為,並利用孤立波分析,建立頻譜以預測瘋狗浪出現。我跟他討論說孤立波的解架構與瘋狗浪的解架構是不同的,而且背景也不同,何以有效 ? 他解釋說他是研究實際物理模型,著重於頻譜分析,不是建設解的架構。另一問題在於非線性薛丁格方程式有虛數在內,但水波的尤拉(Euler)方程式完全沒有虛數在內,為何非線性薛丁格方程式可以研究深水波 ? 他是解釋水波振盪現象可用虛數描述,而其速度位能可用解析函數的虛部來表示。這回答令我印象深刻,因為他純粹由水波振盪著手,而沒用到水波的尤拉(Euler)方程式。

(2) Prof. Matveev: 他是研究達部轉換(Darboux Transformation)的專家,並在此方面寫了一本經典的書籍。他演講完時,我問他如何選擇特殊函數以建構解,他說要觀察物理特性。吃中餐時,我與他討論他的經典的書籍。在他的書籍

中，有一節談到非局部性的 KdV 方程式 (non-local KdV equation)，此方程式是積微分方程式，其中用到希爾伯特轉換 (Hilbert transformation)，它是用來描述內波 (internal waves)的現象，是可積分模型。在其書中，他利用達部轉換建構孤立波，但是無限多個守恆量要如何建構 ? 他說他不知道。還有關於 Calogero-Moser 的相關模型該如何建立 ? 他也無法回答。這都是很好的研究課題。另外，我也問他關於二維的達部轉換 (Binary Darboux Transformation}，在此轉換中，要用到一個恰當型微分(Exact differential) ，基本理念為何 ? 他說是為了處理積分，如此才能與路徑無關。當你考慮伴隨方程式(Adjoint equation) 的達部轉換，就必需考慮此項，如此可以更多的解。收穫良多。

最後，還有一位來自於印尼的女教授 Ikha Magdalena， 她帶領一個研究生團隊研究水波流入岸邊時振幅會增大(Shoaling Phenomenon)，這要用到淺水波方程式。 我頗有興趣，她把她的名片給我，希望有機會能進一步合作。出席這次研討會讓筆者收穫良多，不但可以見識到各個國家的學術研究者提出的種種值得學習的創意、巧妙的研究方法。而如何適當的分析與建構模型去描述這些自然現象，是我們相關領域研究者努力的目標.

肆、建議事項:

在這次會議中，認識到一些聖彼得堡優秀科學家， 希望能促進雙方學術交流。

伍、會議資料

與會圖片二張。


Мраморный зал
Marble Hall
MAIN HALL