行政院所屬各機關因公出國人員出國報告書

（出國類別：其他）

「BIS 投資組合分析研討會」

服務機關：中央銀行

姓名職稱：鄭文欽(聯行科一等專員)

出國地點：瑞士 布魯嫩

出國期間：106 年 6 月 24 日至 7 月 2 日

報告日期：106 年 9 月 19 日

目　錄

壹、前言

國際清算銀行(BIS)於 106 年 6 月 24 日至 106 年 7 月 2 日於瑞士布魯嫩(Brunnen)舉辦「投資組合分析研討會」。本次研討會為期一週，與會學員共計 46 名，包括歐洲、美洲、亞洲、非洲等各國央行前、中、後台人員。研討會由主辦單位 BIS 邀集其內部與課程相關資深主管，針對投資組合分析之理論與實務進行研討。本文先介紹 BIS 的功能以及本次研討會的主要講師；另外將就研討會中所複習之重要財務理論，做快速的回顧；最後再將研討會重點「投資組合分析」，內容摘要如后。

貳、國際清算銀行(BIS)

國際清算銀行(BIS)英文全名為 Bank for International Settlements，1930 年成立於瑞士巴塞爾(Basel)。該行主要功能如下：

一、 <u>**全球央行集會溝通之管道。**</u>透過定期的磋商與合作，增進各國央行之間相互了解與共識。1960 年代貨幣體系轉換、1980 年代拉丁美洲危機與美國 911 事件發生後，BIS 居中協調各國央行，成功扮演危機時期的防火牆角色。

二、 <u>**深入研究總經與金融市場相關領域，發揮智庫功能。**</u>該行專業的研究人員，透過研究並發布經濟與金融市場相

關之議題，引導各界進行更深入的探討。此外，該行亦提供各項銀行與金融機構的統計資料庫，提供全球央行研究人員及學者資料分析與政策制定參考。

三、 <u>央行中的央行。</u>提供全球央行金融及融資服務，近年來亦開始發展資產管理業務，使各國央行外匯存底委外操作有更多優質的選擇。

四、 <u>**金融市場諮詢，金融準則制定。**</u>金融穩定與全球化發展日益重要，該行制定了 Basel Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ等一致化且全球通用的標準協定，對世界各國的金融穩定貢獻良多，扮演全球金融監理火車頭的先端角色。

五、 <u>全球央行教育訓練中心。</u>本次研討會負責人 Mr. Dieter Hunkler 為 BIS 銀行部資深公關經理，於 BIS 服務 30 年。講師 Mr. Wolfgang Gehlen 為銀行部風險暨績效分析師；Dr. Christophe Laforge 為融資部業務主管；Mr. Alex Joia 為資產管理部投資組合主管。各講師分別就業務專長領域，針對相關主題與學員進行講解及研討。

參、基本財務理論回顧

一、 **<u>債券存續期間。</u>**利率風險係指因市場利率波動造成債券價格變動的風險。衡量債券利率風險最常用的方法為債券存續期間（Duration）。所謂債券存續期間，就是債券平均到期年限，代表利率上升（或下降）一個百分點，債券價格下降（或上升）程度的百分比，換言之，就是代表債券價格對利率變動的敏感度。債券存續期間主要有兩種表示方法：一為 Macaulay 存續期間（Macaulay Duration），一為修正存續期間（Modified Duration），其數學式表示如下：

Macaulay Duration

$$D = \frac{-\mathrm{dp}}{\mathrm{p}} \Big/ \frac{dy}{(1+y)}$$

其中 P 為債券市價，y 為債券收益率；

Modified Duration

$$MD = D / (1+y)$$

影響債券存續期間的因素，主要有以下四種，

債券到期日(Maturity)：到期日愈長，Duration 愈大；

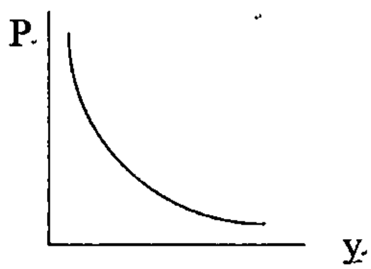
債券收益率(Yield)：收益率愈小，Duration 愈大；

票面利率(Coupon Rate)：票面利率愈小，Duration 愈大；

每年付息次數(Frequency)：次數愈少，Duration 愈大。

二、 <u>債券凸性。</u>存續期間的假設前提，是認為債券收益率與債券價格之間有線性關係。但事實上並不見得如此，收益率與債券價格真實的關係經常為一條凸向原點的曲線（如下圖），這便是所謂債券的凸性（Convexity），以數學式表示如下：

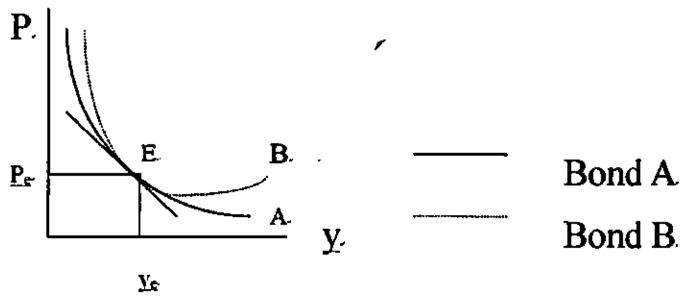
$$\text{Convexity} \equiv \frac{d^2p}{dy^2}\,\frac{1}{P}$$



若債券的價格和到期收益率的關係如上圖所示，則該曲線的斜率(slope)，即一次微分，表現出債券的存續期間(Duration)；而該曲線的曲度，即二次微分，則表現出債券凸性(convexity)。

在實務應用上，我們將 Duration 視為債券的風險指標，即 Duration 愈低，債券受到市場利率的影響愈小、風險愈低；Duration 愈高，債券受到市場利率的影響愈大、債券風險愈高。因此，兩個相同報酬率的債券投資組合，

應選擇 Duration 較低的債券投資組合。至於凸性在實務上的運用可由下圖說明：



假設有 A、B 兩種債券，在價格 P_e 及收益率 y_e 之下有相同的 Duration，此時應選擇 A 或 B 債券？當收益率下降時，A、B 債券價格均上揚，但 B 債券價格上揚幅度較大；反之，當收益率上升時，A、B 債券價格均下挫，但 B 債券價格下跌幅度較小。由此觀之，B 債券優於 A 債券，其中最大的原因，便是兩種債券的凸性不同。因為 B 債券的凸性大，所以它的抗跌性強，即債券價格對市場利率上揚時，反應較不敏感；也因 B 債券的凸性大，所以它的促漲性強，即債券價格對市場利率下降時，反應相當敏感。基於此，我們可以說，當 Duration 相同時，應選擇凸性較大的債券，以降低其市場利率風險。

三、 <u>風險值</u>（Value at Risk，簡稱 VaR）。VaR 為美國 J.P. Morgan 風險控管部門發展出之風險管理工具，為近年來廣為採用之風控技術。風險值係指在某一信賴區間（機率）及特定期間內，某一資產組合可能遭受之最大損失。風險

值的單位為金額，而非標準差或比率；風險值是在某一信賴水準下求出的估計值，而非確定值；風險值是對金融市場正常的情況進行推估，但無法估計極端事件所造成的損失。

由風險值的定義可知，信賴區間（1-α）愈大，則風險值愈大，表示必須提計的資本保障愈高，經營愈保守；反之，信賴區間愈小，則風險值愈小，表示必須提列的資本保障愈低，為積極經營之型態。另外，評估期間愈長，風險值也愈大；評估期間愈短，重新估算風險值便愈頻繁，風險值也將愈精確。

風險值計算的方法主要有：變異變－共變數法（VaRiance CoVaRiance Method）、歷史模擬法（Historical Simulation）及蒙地卡羅模擬法（Monte Carlo Simulation Method）。

1. 變異數－共變數法

變異數－共變數法則，主要係假設資產報酬率為常態分配，並計算出每一項資產的變異數，以及每一種風險因子之間的相關性，藉此求出整個投資組合的變異數與損益分配，進而估算出風險值的一種方法。

由於常態分配的假設，使其有計算簡便的優勢，但也因而存在某些缺點及限制：

(1) 無法正確描述金融資產報酬率應有的分配，如厚

尾、偏態、高峰等現象，經常會低估真實的風險值而提列較低的風險資本。

(2) 無法評估極端事件的機率及損失。

(3) 對於損益為非線性型態的金融商品恐產生較大的誤差，故評估期間無法太長。

2. 歷史模擬法

主要係假設歷史的重複性，亦即資產報酬在過去的走勢會在未來重現，因此可以利用真實的歷史資料預測未來的報酬率，而不必受限於常態分配。如此，歷史模擬法更能符合厚尾、偏態、高峰等資產報酬分配的現象。採用歷史模擬法估計風險值，其主要的步驟如下：

(1) 選取某項資產過去 N+1 天的價格作為模擬資料。

(2) 將此 N+1 筆相鄰資料之價格相減，得出 N 天每日損益變化。

(3) 再將每日損益變化轉為 N 個報酬率，並由小至大依序排列。

(4) 依不同之信賴區間找出「臨界報酬率」乘上「目前資產價格」，即為風險值。

歷史模擬法簡單易懂，無需對價格之波動性做統計上之假設，避免假設錯誤的風險。但是我們也要注意歷史模

擬法的限制及缺點，例如資料品質、極端事件不易由歷史事件模擬、過去的走勢也不一定會在未來重現、過久的資料恐將稀釋近期影響力較大的資料等，都是在使用時必須加以注意及修正。因此，實務上利用指數加權移動平均法（Exponentially Weighted Moving Average）給予近期資料較高的權值，以及當歷史資料不足時利用逐步求解法（Bootstrap Method）增加採樣的筆數，利用樣本資料的重複抽取模擬出母體的分配，進行估計及檢定。

3. 蒙地卡羅模擬法

蒙地卡羅模擬法係假設投資組合的價格變動符合某種隨機過程，利用大數法則原理，藉由電腦模擬上萬種價格可能變動的途徑，建構出投資組合的報酬分配，進而推算出其風險值。在假設合理時，蒙地卡羅模擬法對於非線性及非常態分配之損益型態可以明確的呈現，也可以處理厚尾、不對稱和極端狀態。惟其最主要的缺點，則是需要複雜的電腦技術及大量重複抽樣，成本高且費時，而隨機模型選擇不當恐導致模型風險。

4. 壓力測試

風險值最大的缺點，就是無法針對極端事件發生時，對投資組合所造成的影響，壓力測試提供了補救的方法。壓力測試就是要當金融市場發生重大極端事件時，能夠合理估計資產組合之市場風險曝露機率及可能損失之大

小，以彌補風險值的不足。壓力測試也就是情境分析，包括敏感度分析、歷史情境分析、以及虛擬情境分析。

(1) 敏感度分析，即每次僅改變一個風險變數的數值，藉以觀察或衡量數值的改變對投資組合資產部位價值的影響程度，此法簡單易懂，惟無法處理兩個以上變數所造成的共同影響，因此不適用於鉅額且複雜的投資組合。

(2) 歷史情境分析，將風險變數及目前的資產部位，置入市場過去曾經發生重大變化之情境，評估對目前資產組合的影響效果。此法利用歷史重複發生的可能性，在機率上較具說服力，惟針對過去未曾出現的新種金融商品可能不適用。

(3) 虛擬情境分析，即所謂人為模擬出的最差情境（worse case scenario），藉以衡量極端事件發生時，對資產組合所造成的衝擊。運用時必須注意虛擬情境假設的合理性，以免得出偏離事實的結論。

四、<u>**折現因子、利率及收益率曲線。**</u>收益率為固定收益債券最主要的風險因子。在此介紹 4 項常見的利率因子：折現因子(Discount factors)、零息利率(Zero coupon rates)、到期收益率(Bond yield to maturity)、遠期利率(Forward rates)。折現因子及零息利率均屬一次性現金流量所求得之利率，通常無法直接觀察；而債券收益率是可觀察到

的，惟牽涉到多期的現金流量；遠期利率則是隱含於目前收益率曲線對未來的預期。

1. 折現因子

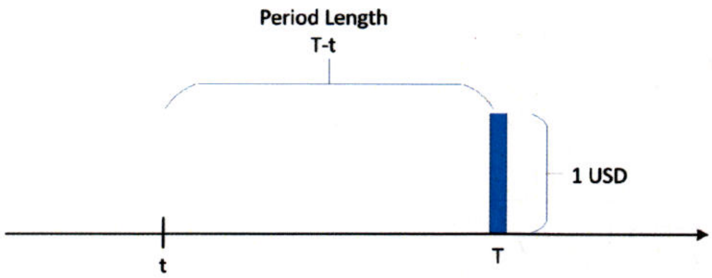
定義 $DF_T = DF_T(USD)$ 表示在時間 T 的時候，1 美元的現值。據此，可以求得所有未來時間之折現因子，進而得到一條折現曲線。當然，隨著支付方信用等級的不同，亦會得出不同的折現因子，傳統上，政府的信用風險(即國家風險)會小於一般公司企業的信用風險，故其折現後價值會比較大：

$DF_T(Corp) < DF_T\ (Govt)$

根據不同的貨幣及不同的信用等級，可以得到不同的折現曲線。當我們掌握所有的折現因子，便可以輕易地計算並分析所有固定現金流之價值。實務上，折現因子通常不易直接觀察，但仍然可以透過市場上現成的資料計算後求出。

2. 零息利率

一般常以利率來取代折現因子，利率是描述投資報酬年率化的概念，利率與折現因子彼此之間是可以相互轉換。零息利率(zero coupon rates)定義如下：



$V(t, Z_T) = DF_T = 1/\,(1+z_T)^{T\text{-}t}$

零息利率亦有各種不同的複利轉換，有單利型態、1 年複利 1 次、半年複利 1 次、及連續複利等。以 10 年期折現因子為例，列示如下：

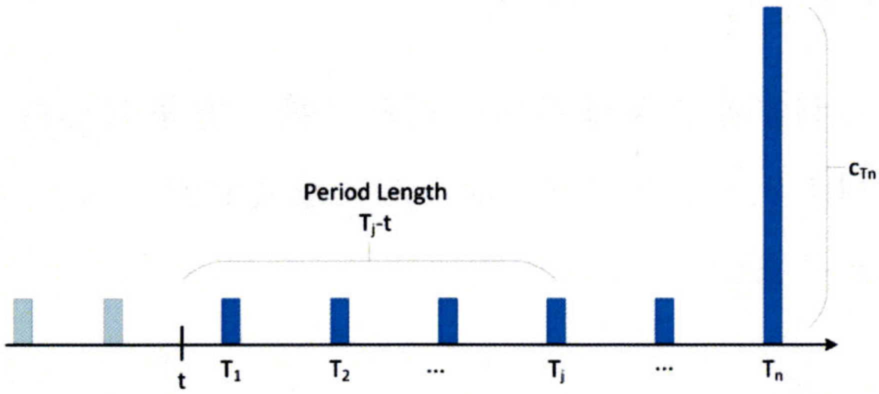
$$DF_T = \underbrace{\frac{1}{(1+(T-t)\cdot z_T)}}_{\text{none (Money Market deposit)}} = \underbrace{\frac{1}{(1+z'_T)^{T-t}}}_{\text{annual}}$$
$$= \underbrace{\frac{1}{(1+z''_T/2)^{2\cdot(T-t)}}}_{\text{semi-annual}} = \underbrace{\exp\left(-z'''_T\cdot(T-t)\right)}_{\text{continuous}}$$

$$DF_{10y} = 0.6666\ldots = \underbrace{\frac{1}{(1+10\cdot 5.00\%)}}_{\text{none}} = \underbrace{\frac{1}{(1+4.14\%)^{10}}}_{\text{annual}}$$
$$= \underbrace{\frac{1}{(1+4.10\%/2)^{(2\cdot 10)}}}_{\text{semi-annual}} = \underbrace{\exp\left(-4.05\%\cdot 10\right)}_{\text{continuous}}$$

3. 債券到期收益率

接著探討各期均有固定現金流入之固定收益債券。依據先前的零息利率，可以得到以下的關係式：

$$
\begin{aligned}
V(t,y) &= \sum_{j=1}^{n} \frac{c_{T_j}}{\left(1+z_{T_j}\right)^{T_j-t}} \\
&= \sum_{j=1}^{n} \frac{c_{T_j}}{(1+y)^{T_j-t}}
\end{aligned}
$$



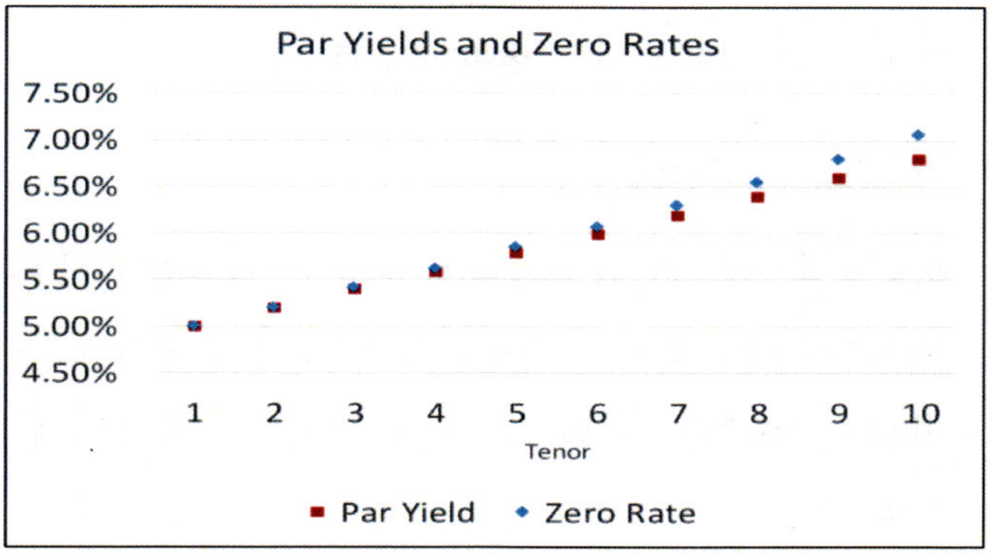
由上式可以了解，到期收益率 y 即為各期零息利率的複雜平均值(complicated average)。根據 y，可以求得債券現值，反之，依市場上可觀察到的債券價格，亦可求出到期收益率 y。

我們可以再加入債息支付頻率 f，以及由 t 時到下一個交割日或下一個付息日之畸零期間 α_t，可得到下列更為完整的債券現值公式：

$$
V(t,y) = \frac{1}{(1+y/f)^{\alpha_t}} \sum_{j=0}^{n} \frac{c/f}{(1+y/f)^{j}} + \frac{1}{(1+y/f)^{n}}
$$

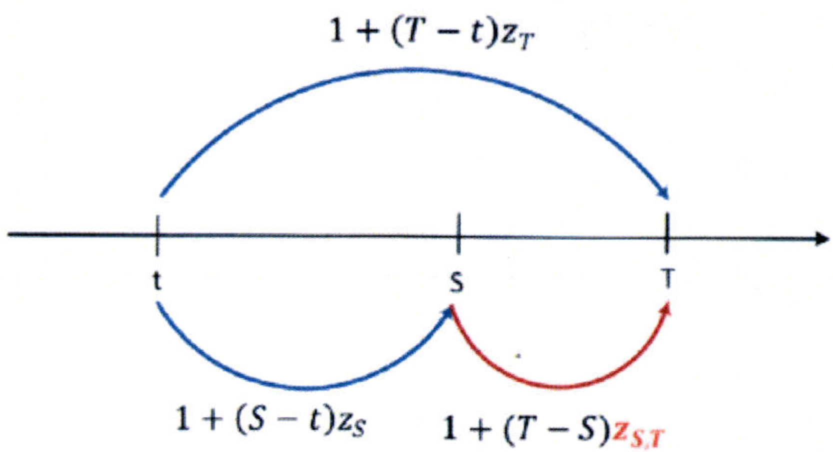
若債券票面利率等於到期收益率，則該債券將以面額成交，此時的收益率可稱之為 Par Yield。我們通常在正斜率的收益率曲線圖形中，可以觀察到零息利率較 Par

Yield 為高。



4. 遠期利率

遠期利率是隱含於目前收益率曲線對未來的預期，茲以圖形及公式定義如后：



$$\underbrace{(1+(T-t)\cdot z_T)}_{\text{(1) invest until } T}=\underbrace{(1+(S-t)\cdot z_S)}_{\text{(2) invest until } S}\cdot\underbrace{(1+(T-S)\cdot z_{S,T})}_{\text{(3) invest from } S \text{ to } T}$$

(1)：投資期間為 t 至 T，利率為 z_T，到期之本利和

(2)：投資期間為 t 至 S，利率為 z_S，到期之本利和

(3)：投資期間為 S 至 T，利率為 $z_{S,T}$，到期之本利和

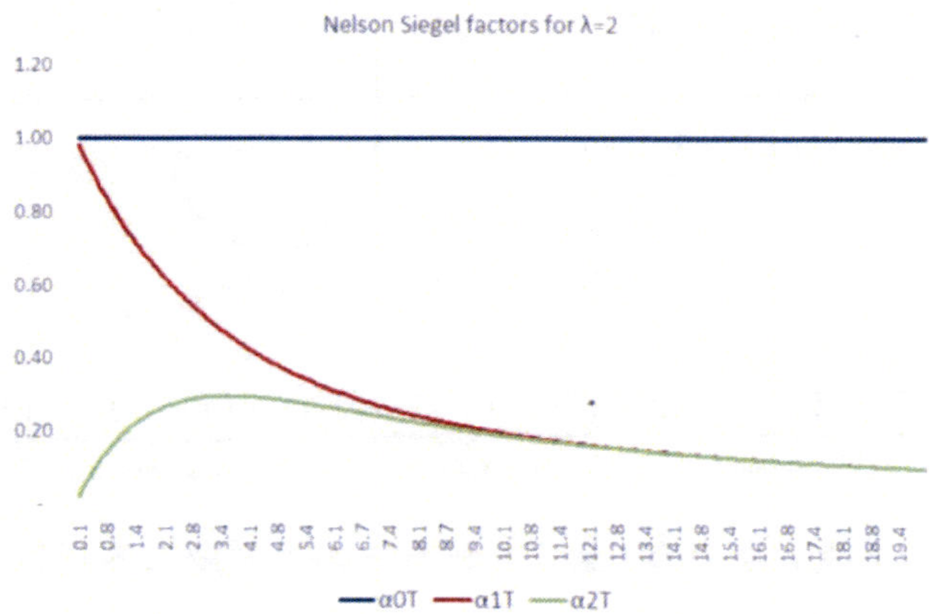
其中，(1) = (2) X (3)，遠期利率為 $z_{S,T}$

五、 Nelson-Siegel 模型

此模型為 Nelson 與 Siegel 於 1987 年共同發表的論文。模型假設利率是由 3 項基本因子：利率水準(level)、斜度(slope)、曲度(curvature)所組成的概念，進而建立收益率曲線。

$$r_T = \beta_0 \cdot \underbrace{\alpha_{0,T}}_{\text{level}} + \beta_1 \cdot \underbrace{\alpha_{1,T}}_{\text{slope}} + \beta_2 \cdot \underbrace{\alpha_{2,T}}_{\text{curvature}} \cdot$$

上述公式為模型的基本型態，r_T 表示時間 T 的利率，α_0、α_1、α_2 為時間 T 的函數。



在此，我們先窺探 Nelson-Siegel 模型的圖形。圖形中可

以發現，當T愈大，斜度及曲度會愈趨近零。

Nelson-Siegel 模型係假設某一指數函數代表整條收益率曲線，接著利用債券市價來進行模型配適。完整公式如下所示：

$$
\begin{aligned}
r_T = \beta_0 \cdot \underbrace{1}_{\alpha_{0,T}} \; &+ \; \beta_1 \cdot \underbrace{\left[1 - \exp\left(\frac{-T}{\lambda}\right)\right] \cdot \frac{\lambda}{T}}_{\alpha_{1,T}} \\
&+ \; \beta_2 \cdot \underbrace{\left(\left[1 - \exp\left(\frac{-T}{\lambda}\right)\right] \cdot \frac{\lambda}{T} - \exp\left(\frac{-T}{\lambda}\right)\right)}_{\alpha_{2,T}} \\
&= \; \beta_0 \cdot \text{level} + \beta_1 \cdot \text{slope} + \beta_2 \cdot \text{curvature}
\end{aligned}
$$

其中

β_0：即期利率長期因子，用以解釋利率水準

β_1：即期利率短期因子，用以解釋收益率曲線斜率

β_2：即期利率中期因子，用解釋收益率曲線之曲度

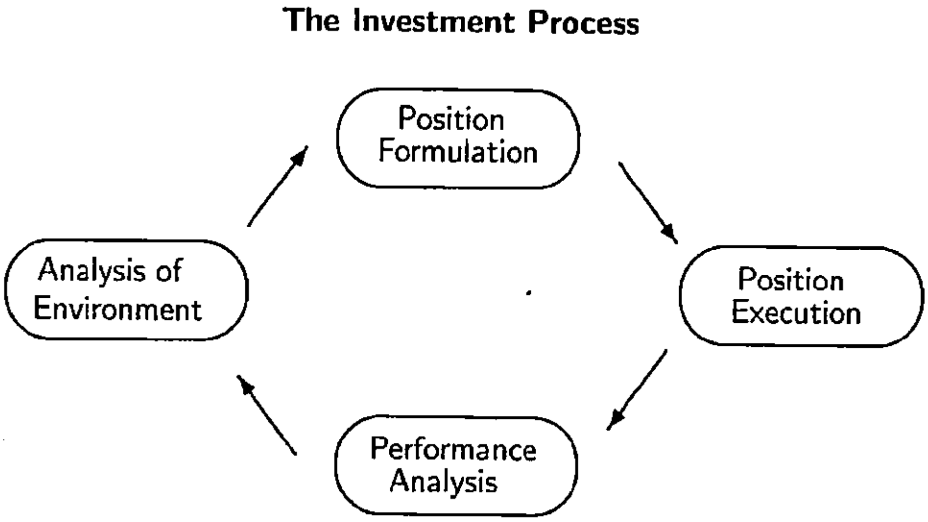
T：到期時間

λ：衰退因子

Nelson-Siegel 模型擁有良好分析結構，能改善實際市場資訊可能產生之干擾因素，並可降低過多的解釋變數，強化對市場收益率曲線之解釋能力。

肆、績效貢獻之衡量

<u>投資程序：</u>一個完整的投資程序包括部位的調整、部位執行、績效分析、以及環境分析。可見績效分析是完整投資程序必要的元素。



<u>投資組合績效：</u>就是投資組合報酬率，在投資組合管理中，風險和報酬絕對是最重要的兩大主題。因此，投資組合經理人不但必須將風險控管在可以承受的範圍內，更要在這基礎之下，尋求報酬率的極大化。

<u>為何要分解投資報酬來源？</u>投資組合分析時，除了了解整個投資組合的報酬率之外，各項風險因子對於總報酬率的貢獻度也必須同時掌握，如此才有助於判斷投資過程的效率性，例如判斷資產管理人員的績效是來自其專業技能亦或僅是運氣？債券投資組合的報酬來自於收益率曲線斜率的變動或是曲線的平行移動？簡單的資產管

理績效衡量僅須注重期末報酬，而專業的資產管理績效衡量則希望更進一步分析報酬的來源，以期在下一期投資中改進。

<u>**解構債券報酬率。**</u>債券報酬率可以分解列示如下：

R = R (carry)+R(curve)+R(credit)+R(convexity)+R(FX)+

R(optionality)

carry return：債券持有期間報酬率

curve return：債券曲度變動報酬率

credit return：債券信用利差變動報酬率

convexity return：債券凸性變動報酬率

FX return：匯率變化之報酬率

Optionality return：選擇權希臘字母變動之報酬率

上述持有時間、曲度變動、信用利差變動、凸性變動、匯價變動等均影響債券報酬率的變化，亦即造成債券投資組合價值變動的來源。此外，各項因子的報酬率加總後須與總報酬率相同，亦即計算上要能符合加法性，或至少須能推導出合理的趨近式。投資組合期初至期末的總報酬率以數學式表達如下：

$$r_V(\mathrm{t},\mathrm{T}) = \frac{\mathrm{V_T} - \mathrm{V_t}}{\mathrm{V_t}} = \frac{\mathrm{V_T}}{\mathrm{V_t}} - 1$$

各項報酬因子的報酬率加總應趨近總報酬

$$r_V(\mathrm{t},\mathrm{T}) = \frac{\mathrm{V_T} - \mathrm{V_t}}{\mathrm{V_t}}$$

$$\cong r_{V,f1}(\mathrm{t},\mathrm{T}) + r_{V,f2}(\mathrm{t},\mathrm{T}) + r_{V,f3}(\mathrm{t},\mathrm{T})$$

$$+ r_{V,f4}(\mathrm{t},\mathrm{T}) + \cdots$$

其中 t= 期初；T=期末；

V=投資組合價值；f_{i}=第 i 個報酬因子

藉由債券評價公式、偏微分運算與 Taylor 展開式的應用，可推導出上述公式分解趨近式：

$$r = \underbrace{y\Delta t}_{\substack{\text{Carry}\\ \text{return}}} - \underbrace{D\Delta y_{\mathrm{TRE}}}_{\substack{\text{Curve}\\ \text{return}}} - \underbrace{D_{\mathrm{S}}\Delta s}_{\substack{\text{Credit}\\ \text{return}}} + \underbrace{\frac{1}{2}C(\Delta y)^2}_{\substack{\text{Convexity}\\ \text{return}}}.$$

其中

y 表示 Yield to Matruity

D 表示 Modified Duration

$\mathrm{D_S}$ 表示 Spread Duration

C 表示 Convexity

舉例說明：假設期初買進 Fannie Mae 發行之票息 4 5/8%，5.8 年後到期的債券，期初與投資期末(共計持有 30 天)的債券特性如下表：

Characteristic	31 Dec 08	30 Jan 09	Change
Yield	2.61%	2.88%	0.27%
Dirty Price	$111.72	$110.48	-$1.24
OA Spread (bps.)	111.18	95.96	-15.23
Equivalent Treasury Yield	1.50%	1.92%	-0.42%
Tenor (yrs.)	5.79	5.71	-0.08
Modified Duration	5.07	4.98	-0.09
Spread Duration	5.07	4.98	-0.09
Convexity	0.29	0.30	0.01
Number of Days		30	

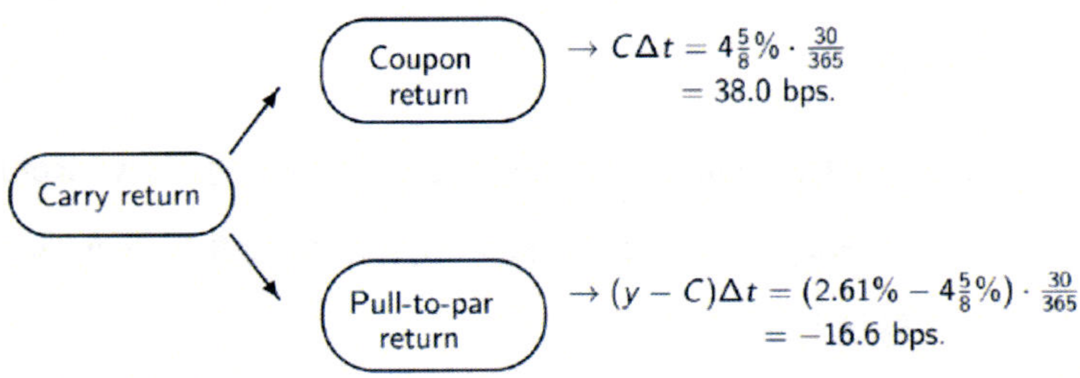
期初買進價格為 111.72，期末賣出價格為 110.48，若持有期間沒有現金流量發生，

總報酬率為 110.48/111.72-1 = -110.7bps

藉由先前報酬因子分解趨近式，將此投資虧損原因分解如下：

1. 債券持有期間報酬率

$$\text{Carry return} = y\Delta t = 2.61\% \cdot \frac{30}{365} = 21.5 \text{ bps.}$$



2. 債券信用利差變動報酬率

$$\begin{aligned}\text{Credit return} &= -\underbrace{\text{Spread Duration}}_{-D_S}\cdot\underbrace{\text{Change in Spread}}_{\Delta s},\\ &= -5.07\cdot -0.15\% = 76.1\text{ bps.}\end{aligned}$$

3. 債券曲度變動報酬率

$$\begin{aligned}\text{Curve return} &= -\underbrace{\begin{matrix}\text{Modified}\\ \text{Duration}\end{matrix}}_{-D}\cdot\underbrace{\begin{matrix}\text{Change in Equivalent}\\ \text{UST Yield}\end{matrix}}_{\Delta y_{TRE}},\\ &= -5.07\cdot 0.42\% = -214.2\text{ bps.}\end{aligned}$$

<u>**結果分析：**</u>藉由此分解式可分析出該筆投資虧損的原因，係來自投資者對收益率曲線變動之誤判。但另一個問題是，即收益率曲線的變動可能來自斜率的改變，亦可能來自型態的改變，因此 BIS 建議可以進一步再針對 Curve Return 再作更細部的分析。主要方法有：

1. 利用 Nelson-Siegel 模型將 Curve Return 再細分至 Level、Slope 與 Curvature 等參數。此法所分解後的計算結果，顯示投資虧損主要來自對利率水準值的誤判。

2. Key Rate Duration 計算主要時間點上的 Curve Return。分解後的計算結果，顯示投資虧損來自對 5 年期收益率變動的誤判。

相關結果列示如下之兩張圖表：

Nelson-Siegel 模型法得出之結果

Return Type	Return (bps.)	
Coupon	*38.0*	
Convergence	*-16.6*	
Carry Return		21.5
Credit Return		78.1
Level	*-482.2*	
Slope	*169.7*	
Curvature	*98.3*	
Curve Return		-214.2
Residual		6.0
Total Return		-110.7

Key Rate Duration 法得出之結果

Return Type	Return (bps.)	
Risk-free Carry	*12.3*	
Spread Carry	*9.1*	
Carry Return		21.5
Credit Return		76.1
6-month	*-0.9*	
2-year	*-6.0*	
5-year	*-175.6*	
7-year	*-31.8*	
Curve Return		-214.2
Residual		6.0
Total Return		-110.7

伍、不確定性的衡量(即風險的衡量)

<u>預測是機率概念，不是絕對概念。</u>丹麥物理學家 Neils Bohr 曾說:「預測是非常困難的,特別是對於未來的預測」。在金融市場中，各種投資工具未來價格走勢左右資產組合的報酬率。然而，未來價格的不確定性卻是普遍存在於各種金融商品。我們的目標，並非精準地預測金融商品未來的價格，這是不可能的任務，但我們可以做的是預測未來報酬率可能的範圍，或利用投資組合和 benchmark 之關係來操作,或是在固定的信心水準之下找出未來投資組合報酬率最差的情況等。

<u>天生一對：報酬與風險。</u>上個章節介紹了投資組合報酬率，並解構總報酬率，進而分析各項因子報酬率對總報酬率的影響。隨著時間的變動，這些因子的走勢也會跟著變動。各項因子未來變動方向是不確定的，這種不確定性即是我們常用到的財務專有名詞「風險」。天下沒有白吃的午餐，有報酬，就有風險；高報酬相對高風險，報酬與風險是形影不離的天生一對，或許大家會有「既生瑜，何生亮？」的無奈…

<u>認識它、接受它、分析它、利用它：面對風險不二法門。</u>

風險既然無可避免，解決的方法就是認識它、接受它、分析它、進而利用它。研討會中介紹了兩種常用於估計風險的統計方法，一為標準差法，一為風險值法(VaR)。

丟一個銅板會得到兩種確定的結果，正面贏 1 元，反面賠 1 元，出現的機率各為 50%；那若丟兩次呢？丟 3 次呢？

	Possible Outcomes							
	1	2	3	4	5	6	7	8
Coin 1	T	T	T	T	H	H	H	H
Coin 2	T	T	H	H	T	T	H	H
Coin 3	T	H	T	H	T	H	T	H
Pay-Out	-$3	-$1	-$1	$1	-$1	$1	$1	$3

若丟 3 次銅板，可得到以上的結果，再依統計學之二項分配，計算出表列機率分配及期望值等。

Wins	Probability	P&L	Expected Pay-Out Contribution
0	12.5%	-$3	-37.5¢
1	37.5%	-$1	-37.5¢
2	37.5%	$1	37.5¢
3	12.5%	$3	37.5¢
Total Expected Pay-Out			$0

據此可進一步求出標準差及 VaR 等相關風險數據如下表

Measure	
Mean	$0
Standard Deviation	$1.73
Minimum	-$3
99% VaR	-$3
99% Tail VaR	-$3

相對風險：Tracking Error。一般常用基準投資組合(簡稱 benchmark)以衡量實際投資組合(簡稱 portfolio)相對績效表現，並得以衡量績效之間偏離的程度 Tracking Error (簡稱 TE)，TE 即可視為投資組合相對風險。風險和報酬率一樣可以經由分解的過程，分析每個風險因子的來源，藉以提升投資的效率。總風險得依照來自各種不同證券(或因子)之風險，分解如下式：

$$\text{Risk Measure} = \underbrace{\mathcal{A}}_{\substack{\text{Risk from}\\ \text{first security}\\ \text{(or factor)}}} + \underbrace{\mathcal{B}}_{\substack{\text{Risk from}\\ \text{second security}\\ \text{(or factor)}}} + \underbrace{\mathcal{C}}_{\substack{\text{Risk from}\\ \text{third security}\\ \text{(or factor)}}} + \cdots$$

套用到 Tracking Error 可以整理如下式，每一種證券風險代表各自不同的意義：

$$\begin{aligned}\text{TE} &= \sigma_{r_a} = \sqrt{\omega_a^T \Sigma_{R_B} \omega_a} = \sqrt{\sum_{j=1}^{N_B}\sum_{k=1}^{N_B} \sigma_{j,k}\omega_{a,j}\omega_{a,k}} \\ &= \frac{1}{\text{TE}}\sum_{j=1}^{N_B}\sum_{k=1}^{N_B} \sigma_{j,k}\omega_{a,j}\omega_{a,k} = \sum_{j=1}^{N_B} \underbrace{\omega_{a,j}\sum_{k=1}^{N_B}\frac{\sigma_{j,k}\omega_{a,k}}{\text{TE}}}_{\text{contribution of security } j}\ .\end{aligned}$$

W：代表權重

再進一步整理，可以得出每一項證券風險等於證券權重和 TE 偏微分的乘積：

$$\begin{aligned} \text{TE} &= \text{TE}(\omega_{a,1}, \ldots, \omega_{a,N_B}) = \sqrt{\omega_a^T \Sigma_{R_B} \omega_a} \\ &= \sum_{j=1}^{N_B} \boxed{\text{Weight of Security}_j} \cdot \boxed{\begin{array}{c}\text{Marginal TE} \\ \text{of Security}_j\end{array}} \\ &= \underbrace{\omega_{a,1} \frac{\partial \text{TE}}{\partial \omega_{a,1}}}_{\substack{\text{TE from} \\ \text{first security}}} + \underbrace{\omega_{a,2} \frac{\partial \text{TE}}{\partial \omega_{a,2}}}_{\substack{\text{TE from} \\ \text{second security}}} + \cdots + \underbrace{\omega_{a,N_B} \frac{\partial \text{TE}}{\partial \omega_{a,N_B}}}_{\substack{\text{TE from} \\ N_B\text{th security}}}. \end{aligned}$$

舉例說明：

	Benchmark	**Portfolio (ω_p)**		
	(ω_b)	**1**	**2**	**3**
Bond 1 (2y)	0.50	0.50	0	0.40
Bond 2 ($4\frac{1}{2}$y)	0	0.25	0.50	0.20
Bond 3 (10y)	0.50	0.25	0.50	0.40

假設有債券 Bond1、Bond2 及 Bond3，到期日分別為兩年、4 年半及 10 年。Benchmark 投資組合權重分別為投資 50% 在 Bond1、50%在 Bond3；另外，有 3 位經理人其投資組合分別為 Portfolio1、Portfolio2、Portfolio3，其持有上述 3 種債券的比重分別為(50%、25%、25%)、(0、50%、50%)、(40%、20%、40%)。

Portfolio 與 Benchmark 權重差定義為積極操作部位(active position)，表示如下：

- $\omega_p \in \mathbb{R}^{N_B \times 1}$ are the security weights in the **portfolio**

$$\omega_p = \begin{bmatrix} \omega_{p,1} \\ \vdots \\ \omega_{p,N_B} \end{bmatrix} \text{ and } \sum_{j=1}^{N_B} \omega_{p,j} = 1.$$

- $\omega_b \in \mathbb{R}^{N_B \times 1}$ those in the **benchmark**

$$\omega_b = \begin{bmatrix} \omega_{b,1} \\ \vdots \\ \omega_{b,N_B} \end{bmatrix} \text{ and } \sum_{j=1}^{N_B} \omega_{b,j} = 1.$$

- $\omega_a \in \mathbb{R}^{N_B \times 1}$ represents the **active** position of the portfolio

$$\omega_a = \omega_p - \omega_b = \begin{bmatrix} \omega_{p,1} \\ \vdots \\ \omega_{p,N_B} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \omega_{b,1} \\ \vdots \\ \omega_{b,N_B} \end{bmatrix} \text{ and } \sum_{j=1}^{N_B} \omega_{a,j} = 0.$$

因此，可以得到下表

	Benchmark	**Portfolio (ω_a)**		
	(ω_b)	**1**	**2**	**3**
Bond 1 (2y)	-	0	-0.50	-0.10
Bond 2 ($4\frac{1}{2}$y)	-	0.25	0.50	0.20
Bond 3 (10y)	-	-0.25	0	-0.10

依上述公式並經由複雜的矩陣演算過程後，可求出 3 位經理人之投資組合相對風險 TE，及絕對風險 VaR 如下表所示：

Statistic	Benchmark (ω_b)	Portfolio (w_p) 1	2	3
Bond 1 (2y)	0.50	0.50	0.00	0.40
Bond 2 ($4\frac{1}{2}$y)	0.00	0.25	0.50	0.20
Bond 3 (10y)	0.50	0.25	0.50	0.40
Tracking Error: $\sqrt{\delta_a^T \Sigma_M \delta_a}$				
Relative Risk		116	90	33
VaR: $\mathcal{N}^{-1}(\alpha)\sqrt{\delta_p^T \Sigma_M \delta_p}$				
Absolute Risk	669	501	813	629

下一個步驟，係利用先前的公式，將相對風險 TE 解構，分析各別債券對不同投資組合 TE 之貢獻度。詳下表：

Bond	Portfolio 1		Portfolio 2		Portfolio 3	
	ω_a	Cont'n	ω_a	Cont'n	ω_a	Cont'n
Bond 1 (2y)	0.00	0.0	0.50	-54.5	-0.10	2.9
Bond 2 ($4\frac{1}{2}$y)	0.25	-53.1	-0.50	144.6	0.20	-28.2
Bond 3 (10y)	-0.25	169.3	0.00	0.0	-0.10	58.4
Total		116.2		90.2		33.1

由表中可知，在 Portfolio1，Bond2 及 Bond3 對於總 TE 的貢獻度分別為-53.1 及 169.3；在 Portfolio2，Bond1 及 Bond2 對於總 TE 的貢獻度分別為-54.5 及 144.6；在 Portfolio3，Bond 1、Bond2 及 Bond3 對於總 TE 的貢獻度分別為 2.9、-28.2 及 58.4。

相對風險除了依照證券種類分解之外，亦可以利用風險因子進行解構的程序，謹將公式列示如下：

$$
\begin{aligned}
\mathsf{TE} &= \sigma_{r_a} \approx \sqrt{\delta_a^T \Sigma_M \delta_a} = \underbrace{\sqrt{\sum_{j=1}^{N_M}\sum_{k=1}^{N_M} \sigma_{j,k}\delta_{a,j}\delta_{a,k}}}_{\text{Here we compute TE...}} \\
&= \frac{1}{\mathsf{TE}}\sum_{j=1}^{N_M}\sum_{k=1}^{N_M} \sigma_{j,k}\delta_{a,j}\delta_{a,k} = \sum_{j=1}^{N_M} \underbrace{\delta_{a,j}\sum_{k=1}^{N_M}\frac{\sigma_{j,k}\delta_{a,k}}{\mathsf{TE}}}_{\substack{\text{contribution of risk factor } j \\ \text{...and here we split TE}}} .
\end{aligned}
$$

M：代表市場變動

$\sum M$ ：代表共變數矩陣

δ：代表敏感性向量

再進一步整理，可以得出每一項風險因子等於敏感性向量和 TE 偏微分的乘積：

$$
\begin{aligned}
\mathsf{TE} &= \mathsf{TE}(\delta_{a,1}, \ldots, \delta_{a,N_M}) = \sqrt{\delta_a^T \Sigma_M \delta_a} \\
&= \sum_{j=1}^{N_M} \boxed{\text{Sensitivity to Factor}_j} \cdot \boxed{\begin{matrix}\text{Marginal TE} \\ \text{of Factor}_j\end{matrix}} \\
&= \underbrace{\delta_{a,1}\frac{\partial \mathsf{TE}}{\partial \delta_{a,1}}}_{\substack{\text{TE from} \\ \text{first factor}}} + \underbrace{\delta_{a,2}\frac{\partial \mathsf{TE}}{\partial \delta_{a,2}}}_{\substack{\text{TE from} \\ \text{second factor}}} + \cdots + \underbrace{\delta_{a,N_M}\frac{\partial \mathsf{TE}}{\partial \delta_{a,N_M}}}_{\substack{\text{TE from} \\ N_M\text{th factor}}} .
\end{aligned}
$$

總風險 VaR 的解構程序和相對風險 TE 類似，謹將結果表列如下：

Bond	Portfolio 1		Portfolio 2		Portfolio 3	
	ω_p	VaR Cont'n	ω_p	VaR Cont'n	ω_p	VaR Cont'n
Bond 1 (2y)	0.50	99.2	0	0	0.40	74.2
Bond 2 ($4\frac{1}{2}$y)	0	121.5	0.50	234.4	0.20	94.7
Bond 3 (10y)	0.50	280.8	0.50	578.6	0.40	460.2
Total		501.4		812.9		629.1

由表中可知，在 Portfolio1，Bond1、Bond2 及 Bond3 對於總 VaR 的貢獻度分別為 99.2、121.5 及 280.8；在 Portfolio2，Bond2 及 Bond3 對於總 VaR 的貢獻度分別為 234.4 及 578.6；在 Portfolio3，Bond 1、Bond2 及 Bond3 對於總 VaR 的貢獻度分別為 74.2、94.7 及 460.2。

陸、結論與建議

一、結論：

報酬與風險，是投資組合分析的核心課題。任何外匯存底操作，諸如外匯交易、債券交易、資產管理、貨幣市場交易等，其分析、研究及績效評估均以此為中心。在電腦程式及財務理論日益精進下，財經學家對於解構報酬及風險之技術亦更勝以往，將使央行更能掌握各項風險因素對整體投資組合的影響，操作手法可望更加靈活及細膩。

二、建議：

1. <u>可承受風險之下，尋求報酬極大化</u>

根據中華民國中央銀行法第二條第三項：本行經營目標「維護對內及對外幣值之穩定」，第卅三條「本行持有國際貨幣準備，並統籌調度外匯」，及第卅四條「本行得視對外收支情況，調節外匯供需，以維持有秩序之外匯市場」。

由此可知，穩定及秩序才是中央銀行的職責，央行外匯存底係全民資產，操作上必須較一般企業更加著重在風險的控管，而不應一味追求高報酬的操作方向。因此，央行投資部位的操作準則，應是在可承受風險範圍內，尋求報酬極大化。

2. <u>加強前、中、後台人員之專業知識</u>

金融市場瞬息萬變，掌管鉅額外匯存底投資部位的中央銀行，對於投資組合各種風險因子的掌握特別重要。外匯調度之前、中、後台相關人員的素質及專業知識應與時俱進，

從前台投資策略的擬訂、中台風控的管理、後台的交割作業與績效評估等，都應更具效率性及科學化，從而掌握數據精確度及預測情境之合理性，俾能在面對更加不確定性的未來，取得優勢及先機。

柒、參考資料

1. Discount Factors, Interest Rates and Curve Fitting – Key Concepts and Techniques, Christoph Laforge, Bank for International Settlements, June 2017
2. Math Refresher – Derivatives, Wolfgang Gehlen, Bank for International Settlements, June 2017
3. Math Refresher – Matrices, Wolfgang Gehlen, Bank for International Settlements, June 2017
4. Math Refresher – Statistics, Wolfgang Gehlen, Bank for International Settlements, June 2017
5. Risk Factor Sensitivities1 – Fixed Coupon Bonds, Wolfgang Gehlen, Bank for International Settlements, June 2017
6. Risk Factor Sensitivities2–Including more Instruments, Christoph Laforge and Wolfgang Gehlen, Bank for International Settlements, June 2017
7. Performance Attribution1 – Allocating Return to Risk Factors, Alex Joia, Bank for International Settlements, June 2017
8. Performance Attribution2 – Miscellaneous Items, Wolfgang Gehlen, Bank for International Settlements, June 2017
9. Measuring the Uncertainty of Return – Overview, Wolfgang Gehlen, Bank for International Settlements, June 2017
10. Measuring Uncertainty1 – 3, Wolfgang Gehlen, Bank for International Settlements, June 2017
11. 「債券評價與利率期限結構」，行政院及所屬各機關出國報告，鄭文欽著，1998 年
12. 「外匯資產風險管理之探討」，行政院及所屬各機關出國報告，鄭文欽著，2012 年