

①

出國報告（出國類別：移地研究）

②

爆炸問題之數值計算

③

服務機關：國立中正大學

姓名職稱：卓建宏 副教授

派赴國家：日本

出國期間：2017.03.28~2017.04.10

報告日期：2017.04.13

摘要

本次移地研究有兩個重要的主題：

第一個主題主要是針對爆炸問題的數值計算與東京芝浦工業大學的石渡哲哉教授及其研究團隊討論有關解的爆炸速率的數值計算法，並以舉行小型 seminar 的方式，互相報告各自的研究成果，進而從中獲得新的研究方向。

第二個主題，由於要精密的計算爆炸問題的解，目前普及的雙精度計算已經不敷使用，因此此次移地研究的另一個目的則是與京都大學藤原宏志教授—各種語言的高精度計算套件的開發者—進行討論爆炸問題的高精度計算的適用性與可行性。藉此機會，也在藤原宏志教授所屬研究室的 seminar 發表了自己最近的研究成果，讓藤原教授對爆炸問題計算的需求有更進一步的了解。

目次

頁次

壹、目的-----	3
貳、過程-----	3-4
參、心得與建議-----	4-5
肆、附件-----	6-9

出國報告

I. 目的

在微分方程式的領域中，由於問題的複雜度及困難度，利用各種數值方法來估解方程式的解的研究是相當重要的。時至今日，已發展出多種數值方法來模擬方程式的解，例如有限差分法、有限元、有限體積法、渦度法、譜方法等。然而不論何種數值方法，只要原方程式的解足夠的平滑，都可以給出相當良好的近似。然而，我們目前所要處理的爆炸問題的解，在有限時間內會失去其平滑性。因此，一般的數值方法並不適用。而我的研究主題，主要就是發展一套理論，可以用來準確的計算此類問題的解，包含收斂性及穩定性的分析與證明。

由於此類問題在日本相當的熱門，也有不少的研究團隊針對此類問題以不同的角度進行數值模擬或理論分析，此行第一個移地研究學校芝浦工業大學裡的石渡哲哉(Ishiwata, Tetsuya)及其研究團隊中的 Dr. Ushijima 及 Dr. Anada 等，就是以此類問題為研究中心的團隊。此次移地研究，由石渡教授安排了一個小型的研討會，我擔任其中一名邀請講者，針對自己的研究成果進行介紹，並透過討論提問的方式來激發與會者的想像力，希望能找出新的研究方向或方法。

此次移地研究的第二個目的，則是與京都大學情報研究科的藤原宏志教授，針對利用高精度(Multi-precision)套件來計算爆炸問題的數值解的可行性及必要性來進行討論。藤原教授針對了不同的語言，如 C、C++、fortran、matlab 等發展了高精度套件。由於目前的各類程式語言，都是在雙精度(double precision)之下進行計算，然而，爆炸問題的計算，在格子分割上要分割到非常細，而在解的計算，則要計算到解非常的大。在此一需求之下，雙精度的計算結果要能夠信任，格子的分割就不能非常細或解就不能計算到非常大。因此，要得到更精密的計算結果，高精度套件是必需的。

II. 過程

由於此次的移地研究，包含了東京及京都兩大都市，因此，在班機的安排上，則訂了 3/28 由台灣出發飛往東京成田機場，4/10 再由大阪關西機場飛回台灣。

3/28 抵達東京之後，隨即前往下榻的池袋的 super hotel。隨即在隔天 3/29，出席了在埼玉大學舉行的研討會。

<http://www.rimath.saitama-u.ac.jp/seminar/kaiseki/index.html>

(in Japanese, 附件一)

其中第二位講者仙葉教授的演講主題是有關於一生物黏菌模型 Keller-Segel system，這也是典型的爆炸問題之一。3/30 當天，參與了由石渡教授在芝浦工業大學舉辦的爆炸問題研討會，並擔任第一位的邀請講者。

<http://www.sic.shibaura-it.ac.jp/~tisiwata/Workshops/ousuuseminar-sit.html>

(in Japanese, 附件二)

在此研究會中，透過各自介紹各自的研究成果並互相討論之後，發現了許多不得不處理的問題，也更進一步的了解到我們所面臨到的問題的困難性。

3/31，出發前往京都。一方面因為這個時期的日本是櫻花季，飯店價格上漲了許多，且預約非常困難，加上滯留時間超過一星期，我選擇入住價格相對較經濟的“週租公寓”。4/3 與藤原教授碰面之後，隨即開始討論相關事宜並實際操作，比較雙精度與高精度的計算結果。在京都大學移地研究期間，4/6 在藤原教授所屬的磯祐介教授的研究室的 seminar (公告請參閱附件三)，介紹了自己最近的研究成果。

III. 心得及建議

此次的研究主要是關於非線性爆炸問題的數值計算，也是我近幾年來的研究重心。此問題的難度在於，一般的電腦計算，能得到的僅是一些“有界”的數據，然而所謂的爆炸問題，指的是方程式的解會在有限的時間變為無窮大。因此，要利用計算所得的有界的數據來近似會變成無窮大的解，需要特殊的演算法。在過去幾年中，我發展出了一套理論，可以利用有界的數據來估計解的爆炸行為，並針對所提出的方法做了收斂性的分析。雖然想法非常的單純，只是簡單的外插法的概念，但跟以往的計算法比較起來，反而可以處理很多之前的方法無法處理的現象。例如，非線性波方程式的爆炸曲線的計算、以不同的 L^p -norm 來測量解的大小時，不同的 norm 是否會在同一個時間變為無窮大的數值檢測、在不知道原方程式的解是否會變為無窮大時，來偵測爆炸發生的可能性等等。

然而，還是有很多問題尚待解決。此次移地研究的主要目的，則是希望針對其中一個問題，爆炸的型式(爆炸速率)進行研究。由於方程式的特性，爆炸型式區分為 Type I 及 Type II 兩種。而目前我的方法在處理 Type I 的爆炸解，已經有了不少的結果。然而在 Type II 的爆炸解的處理上，卻一直窒礙難行。原因是其爆炸速

率，多了一個在數值上很難判斷的項，因此單純透過直接計算數值解的方式，無法準確的估算爆炸速率。而在芝浦工業大學的研究會中，第二位及第三位講者(Prof. Ishiwata 及 Prof. Matue)，則是分別以不同的方式來估算爆炸速率。透過幾個已經知道理論結果的數學模型，他們展示了他們的 algorithm 的計算結果與實際理論結果是吻合的。這是另人非常驚訝的結果。但另一方面，雖然他們的演算法在一些模型的爆炸速率的計算上展現了優異的成果，也由於演算法的複雜度，目前還沒有辦法給予任何的精度或收斂性的分析來嚴謹的證明他們的計算結果的可信度。

另外，與石渡教授也針對高維度的半線性熱方程式的解的數值計算做了討論。低維度的半線性熱方程式，當 sup-norm 爆炸後，後面的時間的解皆為無窮大。因此，計算只需進行至爆炸時間，就可以觀察到解的所有行為。但高維度的半線性熱方程式的解，當維度足夠大時，解除了在有限時間爆炸之外，在爆炸之後，會立刻變為平滑解，然後再更晚的時間再爆炸或全域存在。這個現象在 2000 年初期被廣為討論，也有了許多數學上的結果。但數學上的結果僅能說明有這樣的現象存在，但實際解是如何由無窮大變為有限的平滑解，並沒有多作著墨。因此，如何利用數值重現此一現象，變成了非常有趣的一個問題。很可惜的，在此次討論過程中，尚無任何頭緒來重現此一現象。或許需要再重新研讀數學上是如何建構出些類的解的過程。希望將來可以提出一有效的數值演算法，來重建此類的解。

在與藤原教授的討論中，由安裝及使用上指令的差別開始學習。由於要電腦在計算過程中，針對我們的需求去記憶的不同長度的位數，在指令上也需要做一些調整。請藤原教授簡單的介紹操作方法後，我們便開始針對一般化的 Proudman-Johnson 方程式進行數高精度的數值計算。由於在我稍早的論文中，曾經提出以數值結果來驗證真實解是否爆炸的方法。因此，計算出來的數值結果是否可以信任，扮演著重要的角色。在我們測試的結果中，當分割的格子較小時，與雙精度計算的結果並無太大的差異，而當分割的格子越來越細時，似乎發生了些微的差距。不過，此差距並沒有大到會改變原先的結論。或許，可以再繼續將格子分割再切的更細，但這樣一來，已沒有雙精度的結果可以比較，二來，由於每一次的計算要讓電腦記憶更多的位數，所耗費的時間也越來越長。但為了得到更精確的結果，利用高精度套件來計算是必要的。也希望透過將電腦本身所產生的計算誤差(rounding error)可以降到接近零，讓計算的值可以準確的逼近只有捨去誤差(truncation error)的結果，如此藉由計算結果來做數學的分析也才有意義。

TOP
幹事
研究集会の記録
Links

第23回さいたま数理解析セミナー 開催

第23回プログラム

日時：2017年3月29日(水) 13:30～17:00
 場所：埼玉大学理学部1号館3階 基礎数理演習室

連絡先

石渡 哲哉 [tisiwata \(at\) shibaura-it.ac.jp](mailto:tisiwata@shibaura-it.ac.jp)
 町原 秀二 [machihar \(at\) rimath.saitama-u.ac.jp](mailto:machihar@rimath.saitama-u.ac.jp)

講演者

- 13:30～14:30
 足達 慎二 (静岡大学)
 準線形楕円型方程式の正值解の一意性とその漸近挙動
- 14:45～15:45
 仙葉 隆 (福岡大学)
 間接的走化性モデルの解の挙動について
- 16:00～17:00
 小池 茂昭 (東北大学)
 処罰法による近似解の収束レートについて

応用数学に関する勉強会（応用数学セミナー）@芝浦工大

応用数学に関する話題について、じっくりお話を聞かせていただき、勉強するセミナーです。ご講演いただく話題や関連する話題について、参加者で議論を深めたいと思います。不定期開催です。

石渡哲哉（芝浦工大）

2016年度

応用数学セミナー@芝浦工大 「爆発問題の数値解析」

Applied Mathematics Seminar@SIT "Numerical Analysis on Blow-up problems"

下記はおおよその目安で、講演（話題提供）時間と質疑応答・議論を含みます。おおよそ90分くらいが間の目安ですが、途中で質疑応答や議論を行いつつ進むことになると思うので、大幅にずれる可能性もあります。ご承知おきください。いわゆる、講演→質疑応答、という感じではなく、講演者＝話題提供者、という感じで、その話題に対してどんどん議論したいと思います。（議論の収束も目指しません。）また、適当に休憩を入れます。

日時 2017年3月30日（木） 13:25～

場所 芝浦工業大学 大宮キャンパス 5号館5F 5541教室

13:25 Seminar opening

13:30- Chien-Hong Cho (Chung Cheng University, Taiwan) Invited talk

Topic 1: "Numerical treatments for blow-up problems: Analytical and computational numerical blow-up solutions"

Abstract:

There are many numerical methods constructed to compute blow-up solutions and blow-up behaviors. Some of them have also rigorous proofs to guarantee their validities.

Among those, we quote two methods: adaptive temporal meshes and uniform temporal meshes. In this talk, we review the results concerning how the two methods reproduce the finite-time blow-up phenomenon.

15:00- K. Anada, T. Ishiwata and T.K. Ushijima

Topic 2: "A simple idea for numerical estimation of blow-up rate using a scale invariance."

(「スケール不変性を利用した爆発レートの数値的推定について」)

Abstract:

スケール不変性をもつ方程式(系)の爆発解の数値計算法としてリスケーリング・アルゴリズムがあるが、

この計算過程で出てくるリスケール時間列に関連する量の特徴から数値的に爆発レートを推定することができる。

この方法は非常に単純ではあるが、冪タイプの爆発レートだけでなく冪にlog やloglog等の加速項がついたような

複雑な爆発レートについても適用が可能である。これについて説明し、議論を行う。

16:30- K. Matsue (九州大学マス・フォア・インダストリ研究所) Invited talk

Topic 3: 「コンパクト化による爆発解ダイナミクスと爆発レート」

Abstract:

コンパクト化を用いた力学系の観点からの爆発解の特徴づけ、その精度保証付き数値計算の結果が芽を出しつつありますが([1,2,3])、

その中であまり問題としなかった「爆発レート」はどうなっているのか？

爆発解の爆発レートと、無限遠ダイナミクスとの関連性を考察します。

参考文献:

[1] : K. Matsue, arXiv: 1611.06346

[2] : A. Takayasu, K. Matsue, T. Sasaki, K. Tanaka, M. Mizuguchi and S. Oishi, JCAM, 314(2017), 10-29.

[3] : K. Matsue and A. Takayasu, in preparation.

寄件人: **yuusuke iso** iso@acs.i.kyoto-u.ac.jp
標題: Num. & Appl. Anal. Sem.: April 6
日期: 2017年3月31日 下午3:34
收件人: iso@acs.i.kyoto-u.ac.jp



数値解析・応用解析セミナー

4月6日(木) 15:00 -- 16:00 卓 建宏(中華民国 中正大学)
"A numerical algorithm for blow-up problem revisited."

<研究発表要旨>

In many evolution equations, solutions may become unbounded in finite time. This phenomenon is often called blow-up and the finite time is called the blowup time. To numerically reproduce the finite-time blow-up phenomenon, schemes with adaptive time meshes were considered to be necessary. Since the numerical blow-up time is defined by an infinite sum, which implies that one needs to compute infinite times to achieve blow-up, this method cannot be carried out in real computation. As a consequence, Cho (Jpn. J. Indust. Appl. Math. 2013) proposed an algorithm accomplished by schemes with uniform time meshes for the computation of blow-up solutions. In this talk, we are concerned with a question: to what extent can this algorithm be applied to compute the blow-up solutions and reproduce the blow-up behavior?

●セミナー室: 京都大学 総合研究12号館 2階203号室
(応用解析学講座セミナー室)

●総合研究12号館はキャンパスマップでは「京都大学本部構内 54番建物」です。

セミナー連絡先: 京都大学大学院 情報学研究科 先端数理科学専攻
磯 祐介 e-mail: iso@i.kyoto-u.ac.jp

<ご案内>

旧「複雑系科学専攻」は平成29年度より「先端数理科学専攻」に改称されました。