

行政院所屬各機關因公出國人員出國報告書

(出國類別：其他)

參加印尼央行舉辦之訓練課程  
「總體金融模型建構與分析」  
出國報告

服務機關：中央銀行

姓名職稱：蔡釗旻/辦事員

派赴國家：印尼

出國期間：105年8月21日至27日

報告日期：105年11月

## 目次

壹、前言 .....	1
貳、仿射 (Affine) 模型與ACM估計方法之簡介 .....	2
參、方法論—狀態空間模型與VAR模型 .....	4
一、基本介紹 .....	4
二、以ACM法設定訊號方程式 .....	6
三、以Bernanke法設定訊號方程式 .....	7
四、VAR模型 .....	8
肆、資料變數說明與實證結果 .....	9
一、資料變數說明 .....	9
二、以ACM法設定訊號方程式之估計結果 .....	9
三、以Bernanke法設定訊號方程式之估計結果 .....	12
四、VAR模型之估計結果 .....	15
伍、結論與建議 .....	18
一、結論 .....	18
二、建議 .....	20
參考文獻 .....	21
附錄一、仿射模型與ACM估計方法 .....	23
一、仿射模型 .....	23
二、ACM估計方法 .....	24
附錄二、狀態空間模型估計之預期利率 .....	27

## 圖目次

圖1、仿射與投影之定義.....	3
圖2、NS與仿射殖利率曲線以及風險中立殖利率.....	3
圖3、ACM估計方法與狀態空間模型（以ACM法設定訊號方程式） 估計之期限貼水.....	11
圖4、ACM估計方法與狀態空間模型（以Bernanke法設定訊號方程式） 估計之期限貼水.....	13
圖5、APCF與狀態空間模型估計之通膨預期.....	15
圖6、衝擊反應函數.....	16
圖7、臺灣長期期限貼水變動量（以10年期為例）.....	19

## 表目次

表1、模型變數與資料來源.....	9
表2、狀態空間模型之估計結果—以ACM法設定訊號方程式.....	10
表3、狀態空間模型之估計結果—以Bernanke法設定訊號方程式.....	14
表4、變異數分解.....	18

## 壹、前言

本次參加印尼央行舉辦之「總體金融模型建構與分析」(Macro financial Modelling and Analysis) 研習課程，為期5天，計有臺灣、香港、馬來西亞、孟加拉、柬埔寨、印度、印尼、菲律賓、東帝汶、斯里蘭卡、土耳其，共11個國家派員參與。

研習內容包含資產評價概念之建立，並建構總體金融實證模型與預測，以及相關研究應用等，主要探討議題有建構連續型殖利率曲線、藉由仿射模型拆解殖利率曲線、計算隱含波動度之機率密度函數、透過狀態空間模型評估不可觀測之經濟變數，以及採用GARCH模型配適市場波動度。此外，課程中亦針對上述模型，實際執行E-views軟體操作。研習講師由英國央行經濟學者Ole Rummel擔任，學識及經驗均相當豐富，熟稔相關主題，獲益匪淺。

由於多數文獻指出期限貼水主導著殖利率曲線的變動情形。如Bernanke於2006年之演講稿說明長期利率的行為變動小，係因期限貼水變動不大，致其受緊縮貨幣政策影響不大。因此，在全球金融危機期間，由於政策利率非常接近零底限，為了有效降低長期利率，Fed因而採用非傳統貨幣政策，透過壓低期限貼水，進而使長期利率下滑。由此可知期限貼水之重要性，除因其驅動著殖利率曲線之走勢外，對於利率傳遞機制能否順利運行亦扮演著重要角色。

Wright (2008)調查期限貼水與通膨不確定性間之關係，結果指出二者存在強烈地正相關，另指出關於中長期通膨不確定性有很大部分可以解釋為何期限貼水為正值，即隱含投資者對正的期限貼水之要求。由此可見，期限貼水應包含著通膨預期的訊息，係因當預期通膨上升時，則會導致投資人要求的補償增加，進而造成期限貼水上升。因此，通膨預期似乎影響著期限貼水之走勢。再者，泰勒法則指出，央

行的決策會參考產出與通膨等變數，可知，通膨預期的重要性不僅係央行貨幣政策的參考依據，亦影響民間儲蓄與投資的實質效益，甚至是投資人對補償之要求，進而影響期限貼水，可見通膨預期與期限貼水間之關係相當密切。

承上所述，本文主要針對臺灣之期限貼水與通膨預期，兩個不可觀測之變數進行狀態空間模型之估計。必須注意的是該模型僅係依照研究者給予之資料進行機械性之遞迴估計，所估計之不可觀測變數序列趨勢，僅具有統計性質，有鑑於此，為了確保狀態空間模型能合理地描繪之期限貼水與通膨預期，本文藉由仿射（Affine）模型將殖利率曲線拆解出的期限貼水作為基準估計量，以利檢視狀態空間模型估計之期限貼水是否合理，而通膨預期則以APCF調查資料<sup>1</sup>為基礎，進而估算各月的預期通膨，來檢視狀態空間模型估計之通膨預期是否合理。另外，將估計之通膨預期與期限貼水進行VAR模型估計，以驗證二者的關係。

報告共分為五個部分，除前言外，第貳節簡介仿射模型與ACM估計方法，詳細數學等式與估計步驟將置於附錄；第參節係方法論，主要說明狀態空間模型與VAR模型；第肆節為資料說明與實證結果；第伍節為結論與建議。

## 貳、仿射（Affine）模型與ACM估計方法之簡介

本節僅對仿射模型與ACM估計方法做概念介紹，其餘詳附錄。

仿射之定義係從無窮遠處的平面與一投影平面間的投影轉換，如，平面 $(V_2-V_1, V_3-V_1)$ 移動 $V_1$ 而得的平面 $(V_2, V_3)$ ；相較於投影（Projection）之定義係從三度空間投影至一投影平面，如，Y投影至

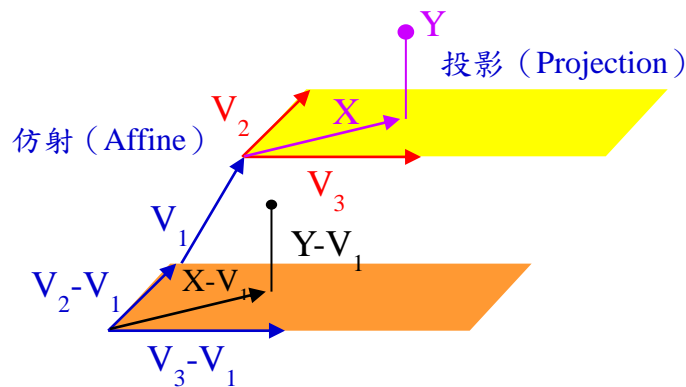
---

<sup>1</sup> Consensus Forecast機構每月調查各大預測機構對經濟成長率、通貨膨脹率等總體變數對當年與次年的預測值，並將此等機構之預測值集成一個資料庫。

平面  $(V_2, V_3)$  (見圖1)。由於債券價格函數具有仿射結構<sup>2</sup>，因此，能藉由仿射模型來估計債券價格。

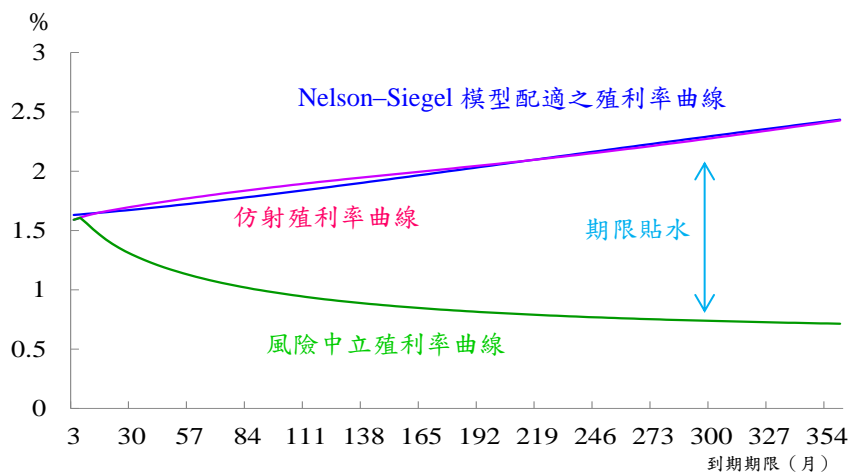
由於仿射模型有多個參數需要估計，因此，Adrian et al. (2013)提出「超額報酬 (excess return)」的概念，在適當的認定限制 (identifying restrictions) 下，可藉由最大概似法來估計出風險價格，其簡化了仿射模型較複雜的估計方式。(詳細推導見附錄)

圖1、仿射與投影之定義



除估計出風險價格外，亦可估計出風險中立下的債券價格，而以配適的公債殖利率與估計之風險中立下的公債殖利率間之差距視為風險補償，即期限貼水，其反映了金融市場的風險趨避程度及投資者對未來經濟成長、通膨、貨幣政策的不確定性，如圖2所示。

圖2、NS與仿射殖利率曲線以及風險中立殖利率



<sup>2</sup> 計算債券價格時係從n期折現至當期，輔以仿射之定義，n期對應著平面  $(V_2-V_1, V_3-V_1)$ ，而當期對應著平面  $(V_2, V_3)$ ，經過折現  $(V_1)$  可得債券價格，故債券價格函數具有仿射結構。

而預期利率係市場上對未來金融市場上交易利率的預期（如，隔拆利率、商業本票利率、可轉讓定存單利率等）。事實上，若一國央行採以錨定通膨為目標，則預期利率的穩定與否，可作為檢視央行在控制通膨上的能力與可信度，而其水準值除了隱含市場交易利率外，亦包含預期通膨的資訊。假設通膨目標為3.5%，而長期下預期利率水準值為3%，則表示央行在錨定通膨的能力上較佳，且未來長期通膨率可能約為3%。

## 參、方法論－狀態空間模型與VAR模型

### 一、基本介紹

狀態空間模型係一估計動態時間序列的模型，主要處理不可觀測之總體經濟變數，如：中性利率、潛在產出、期限貼水、通膨預期等。此等變數在政策制定與經濟研究上可能係一關鍵性因素，因此，若能藉由計量模型描繪出此等變數之時間序列，進一步捕捉市場中隱含的訊息，有助於掌握經濟與金融市場脈絡，及時因應市場情勢。

$$y_t = \alpha + \beta_t x_t + \mu_t, t=1,2,\dots,T \dots\dots\dots (1)$$

不同於線性迴歸，等式（1）的 $\beta_t$ 會隨時間而改變，欲估計隨時間推移而變動之變數，需要藉由卡門濾波法來處理，此為狀態空間模型中的基礎工具，主要利用在t期之所有可用資訊，透過遞迴（recursive）步驟來計算t期下之不可觀測變數的狀態矩陣，產生最小均方差預測值，並具有預測與更正功能。

基本的狀態空間模型需要設定以下兩個方程式：

**訊號方程式<sup>3</sup>** (signal equation) :  $y_t = H_t\beta_t + A_tZ_t + \mu_t$  ,  $\mu_t \sim N(0, R)$

其中， $y_t$ 為可觀測變數之 $(n \times 1)$ 向量，即研究者有興趣的內生變數向量， $H_t$ 為 $(n \times m)$ 矩陣， $A_t$ 為 $(k \times n)$ 參數矩陣， $\beta_t$ 為不可觀測變數之 $(m \times 1)$ 向量，即狀態變數， $Z_t$ 為可觀測外生變數之 $(n \times k)$ 矩陣， $\mu_t$ 為殘差項，其平均數為0，變異數為 $R$ ，(即 $E(\mu_t)=0$ ， $\text{var}(\mu_t)=R$ )。

**狀態方程式<sup>4</sup>** (state equation) :  $\beta_t = \tilde{\alpha} + F\beta_{t-1} + \varepsilon_t$  <sup>5</sup> ,  $\varepsilon_t \sim N(0, Q)$

其中， $F$ 為 $(m \times m)$ 矩陣， $v_t$ 係序列無相關之殘差，為 $(g \times 1)$ 向量，其平均數為0，變異數為 $Q$ ，(即 $E(\varepsilon_t)=0$ ， $\text{var}(\varepsilon_t)=Q$ )。必須注意的是狀態方程式必須為AR型式或隨機漫步 (random walk) 型式。

當 $\tilde{\alpha}$ 、 $F$ 、 $R$ 、 $Q$ 為已知，便可利用卡門濾波法 (Kalman filter) 進行估計，惟若 $\tilde{\alpha}$ 、 $F$ 、 $R$ 、 $Q$ 未知，則須透過最大概似法進行估計。在E-views軟體中，針對估計後求算狀態變數序列有兩種方法：(1) 過濾法 (filtered)：根據 $t$ 期下獲取的解釋變數 ( $x$ ) 之資訊來估算 $t$ 期的被解釋變數 ( $y$ ) 之序列；(2) 平滑法 (smoothed)：基於全部樣本期間所獲取的解釋變數 ( $x$ ) 之訊息來估算 $t$ 期的被解釋變數 ( $y$ ) 之序列。於此，講師Ole建議採用平滑法做為主要結果，因此，本文以平滑法所估算之序列作為估計結果。

另外，參數起始值 (starting value) 之設定未有一定標準，除反覆試驗 (try and error) 外，另可根據經驗法則進行設定，如AR模型之定態條件為係數取絕對值必須小於1 (即 $|F| < 1$ )，因此，可設定0.9；而指數波動度通常介於-1至-10之間，因此，設定-2的起始值尚屬合

---

<sup>3</sup> 或稱衡量方程式 (measurement equation)、可觀測方程式 (observation equation)。

<sup>4</sup> 或稱轉換方程式 (transition equation)，主要處理不可觀測之變數。

<sup>5</sup> 狀態方程式之表達等式並未包含外生變數，惟其亦可納入狀態方程式中。



理；抑或透過迴歸之估計結果，針對殘差變異與估計參數進行測度 (calibration)，即以OLS估計結果作為起始值。

## 二、以ACM法設定訊號方程式

ACM估計方法，係利用仿射模型之概念估計出債券價格與風險價格，以描繪出風險中立下的殖利率曲線，進而將殖利率曲線拆解成「期限貼水」與「預期利率」兩個部分，可知**債券殖利率=期限貼水+預期利率**，以此作為訊號方程式。另外，期限貼水之狀態方程式設定為隨機漫步模型，而預期利率之狀態方程式設定為AR(1)模型，並加入外生變數-前1期之隔夜利率。相關變數如下：

$i_t^2$ 、 $i_t^5$ 、 $i_t^7$ 、 $i_t^{10}$ 、 $i_t^{20}$ 、 $i_t^{30}$ 分別為2、5、7、10、20、30年期公債殖利率， $tp_t^2$ 、 $tp_t^5$ 、 $tp_t^7$ 、 $tp_t^{10}$ 、 $tp_t^{20}$ 、 $tp_t^{30}$ 分別為2、5、7、10、20、30年期期限貼水， $exp_t^2$ 、 $exp_t^5$ 、 $exp_t^7$ 、 $exp_t^{10}$ 、 $exp_t^{20}$ 、 $exp_t^{30}$ 分別為2、5、7、10、20、30年期預期利率， $on_{t-1}$ 為前1期之隔夜拆款利率， $\mu_{1,t}$ 、 $\varepsilon_{1,t}$ 、 $\varepsilon_{2,t}$ 為各模型對應之干擾項。

### 2年期公債殖利率

$$(1) i_t^2 = tp_t^2 + exp_t^2 + \mu_{1,t}$$

$$(2) tp_t^2 = tp_{t-1}^2 + \varepsilon_{1,t}$$

$$(3) exp_t^2 = c_1 + c_2 * exp_{t-1}^2 + c_3 * on_{t-1} + \varepsilon_{2,t}$$

$$(4) \text{Var}(\mu_{1,t}) = \omega_1^2$$

$$(5) \text{Var}(\varepsilon_{1,t}) = \sigma_1^2, \text{Var}(\varepsilon_{2,t}) = \sigma_2^2$$

### 5年期公債殖利率

$$(6) i_t^5 = tp_t^5 + exp_t^5 + \mu_{1,t}$$

$$(7) tp_t^5 = tp_{t-1}^5 + \varepsilon_{1,t}$$

$$(8) exp_t^5 = c_1 + c_2 * exp_{t-1}^5 + c_3 * on_{t-1} + \varepsilon_{2,t}$$

$$(9) \text{Var}(\mu_{1,t}) = \omega_1^2$$

$$(10) \text{Var}(\varepsilon_{1,t}) = \sigma_1^2, \text{Var}(\varepsilon_{2,t}) = \sigma_2^2$$

### 7年期公債殖利率

$$(11) i_t^7 = tp_t^7 + exp_t^7 + \mu_{1,t}$$

$$(12) tp_t^7 = tp_{t-1}^7 + \varepsilon_{1,t}$$

$$(13) exp_t^7 = c_1 + c_2 * exp_{t-1}^7 + c_3 * on_{t-1} + \varepsilon_{2,t}$$

### 10年期公債殖利率

$$(16) i_t^{10} = tp_t^{10} + exp_t^{10} + \mu_{1,t}$$

$$(17) tp_t^{10} = tp_{t-1}^{10} + \varepsilon_{1,t}$$

$$(18) exp_t^{10} = c_1 + c_2 * exp_{t-1}^{10} + c_3 * on_{t-1} + \varepsilon_{2,t}$$

$$(14) \text{Var}(\mu_{1,t}) = \omega_1^2$$

$$(19) \text{Var}(\mu_{1,t}) = \omega_1^2$$

$$(15) \text{Var}(\varepsilon_{1,t}) = \sigma_1^2, \text{Var}(\varepsilon_{2,t}) = \sigma_2^2$$

$$(20) \text{Var}(\varepsilon_{1,t}) = \sigma_1^2, \text{Var}(\varepsilon_{2,t}) = \sigma_2^2$$

### 20年期公債殖利率

### 30年期公債殖利率

$$(21) i_t^{20} = tp_t^{20} + exp_t^{20} + \mu_{1,t}$$

$$(26) i_t^{30} = tp_t^{30} + exp_t^{30} + \mu_{1,t}$$

$$(22) tp_t^{20} = tp_{t-1}^{20} + \varepsilon_{1,t}$$

$$(27) tp_t^{30} = tp_{t-1}^{30} + \varepsilon_{1,t}$$

$$(23) exp_t^{20} = c_1 + c_2 * exp_{t-1}^{20} + c_3 * on_{t-1} + \varepsilon_{2,t} \quad (28) exp_t^{30} = c_1 + c_2 * exp_{t-1}^{30} + c_3 * on_{t-1} + \varepsilon_{2,t}$$

$$(24) \text{Var}(\mu_{1,t}) = \omega_1^2$$

$$(29) \text{Var}(\mu_{1,t}) = \omega_1^2$$

$$(25) \text{Var}(\varepsilon_{1,t}) = \sigma_1^2, \text{Var}(\varepsilon_{2,t}) = \sigma_2^2$$

$$(30) \text{Var}(\varepsilon_{1,t}) = \sigma_1^2, \text{Var}(\varepsilon_{2,t}) = \sigma_2^2$$

### 三、以Bernanke法設定訊號方程式

Bernanke (2013)以Fed研究人員之模型，來說明10年期公債殖利率，可將長期利率分解成三個部分：(1) 反映債券存續期間內的通膨；(2) 經通膨調整後的短期實質利率；(3) 期限貼水，可將之表示為殖利率=預期平均通膨率+預期平均實質利率+期限貼水，以此作為訊號方程式。相關變數如下：

$i_t^2$ 、 $i_t^5$ 、 $i_t^7$ 、 $i_t^{10}$ 、 $i_t^{20}$ 、 $i_t^{30}$ 分別為2、5、7、10、20、30年期公債殖利率， $tp_t^2$ 、 $tp_t^5$ 、 $tp_t^7$ 、 $tp_t^{10}$ 、 $tp_t^{20}$ 、 $tp_t^{30}$ 分別為2、5、7、10、20、30年期期限貼水， $cpi_t^e$ 為預期通膨率， $real_t^e$ 為預期實質利率， $cbc_{rate}$ 為央行重貼現率， $\mu_{1,t}$ 、 $\mu_{2,t}$ 、 $\mu_{3,t}$ 、 $\mu_{4,t}$ 、 $\mu_{5,t}$ 、 $\mu_{6,t}$ 、 $\varepsilon_{1,t}$ 、 $\varepsilon_{2,t}$ 、 $\varepsilon_{3,t}$ 、 $\varepsilon_{4,t}$ 、 $\varepsilon_{5,t}$ 、 $\varepsilon_{6,t}$ 、 $\varepsilon_{7,t}$ 、 $\varepsilon_{8,t}$ 為各模型對應之干擾項。於通膨預期之狀態方程式加入外生變數-前1期之通膨率；而預期實質利率之狀態方程式則加入外生變數-前1期之央行重貼現率扣除前1期實際通膨率。

$$(1) i_t^2 = tp_t^2 + cpi_t^e + real_t^e + \mu_{1,t} \quad (2) i_t^5 = tp_t^5 + cpi_t^e + real_t^e + \mu_{2,t}$$

$$(3) i_t^7 = tp_t^7 + cpi_t^e + real_t^e + \mu_{3,t} \quad (4) i_t^{10} = tp_t^{10} + cpi_t^e + real_t^e + \mu_{4,t}$$

$$(5) i_t^{20} = tp_t^{20} + cpi_t^e + real_t^e + \mu_{5,t} \quad (6) i_t^{30} = tp_t^{30} + cpi_t^e + real_t^e + \mu_{6,t}$$

$$\begin{aligned}
(7) \quad tp_t^2 &= tp_{t-1}^2 + \varepsilon_{1,t} & (8) \quad tp_t^5 &= tp_{t-1}^5 + \varepsilon_{2,t} \\
(9) \quad tp_t^7 &= tp_{t-1}^7 + \varepsilon_{3,t} & (10) \quad tp_t^{10} &= tp_{t-1}^{10} + \varepsilon_{4,t} \\
(11) \quad tp_t^{20} &= tp_{t-1}^{20} + \varepsilon_{5,t} & (12) \quad tp_t^{30} &= tp_{t-1}^{30} + \varepsilon_{6,t} \\
(13) \quad cpi_t^e &= c_1 + c_2 * cpi_{t-1}^e + c_3 * \pi_{t-1} + \varepsilon_{7,t} \\
(14) \quad real_t^e &= c_4 + c_5 * real_{t-1}^e + c_6 * (cbc_{rate,t-1} - \pi_{t-1}) + \varepsilon_{8,t} \\
(15) \quad \text{Var}(\mu_{1,t}) &= \omega_1^2, \text{Var}(\mu_{2,t}) = \omega_2^2, \text{Var}(\mu_{3,t}) = \omega_3^2, \text{Var}(\mu_{4,t}) = \omega_4^2, \text{Var}(\mu_{5,t}) = \omega_5^2, \\
&\text{Var}(\mu_{6,t}) = \omega_6^2 \\
(16) \quad \text{Var}(\varepsilon_{1,t}) &= \sigma_1^2, \text{Var}(\varepsilon_{2,t}) = \sigma_2^2, \text{Var}(\varepsilon_{3,t}) = \sigma_3^2, \text{Var}(\varepsilon_{4,t}) = \sigma_4^2, \text{Var}(\varepsilon_{5,t}) = \sigma_5^2, \\
&\text{Var}(\varepsilon_{6,t}) = \sigma_6^2, \text{Var}(\varepsilon_{7,t}) = \sigma_7^2, \text{Var}(\varepsilon_{8,t}) = \sigma_8^2
\end{aligned}$$

#### 四、VAR模型

一般所稱之VAR模型通常指的係縮減式VAR，即模型納入之變數均為自身落後項與其他變數落後期的函數，該模型優點為考慮了變數的動態行為。本文欲透過VAR模型找出政策利率( $i_t$ )、期限貼水( $tp_t$ )與通膨預期( $\pi_t^e$ )三者間之關係，並以AIC準則找出最適落後期數( $p$ )。VAR( $p$ )模型，即包含變數之落後1、2... $p$ 期，模型設定如下：

$$\begin{bmatrix} i_t \\ tp_t \\ \pi_t^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_1^{11} & \Phi_1^{12} & \Phi_1^{13} \\ \Phi_1^{21} & \Phi_1^{22} & \Phi_1^{23} \\ \Phi_1^{31} & \Phi_1^{32} & \Phi_1^{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \pi_{t-1}^e \\ i_{t-1} \\ tp_{t-1} \end{bmatrix} + \dots + \begin{bmatrix} \Phi_p^{11} & \Phi_p^{12} & \Phi_p^{13} \\ \Phi_p^{21} & \Phi_p^{22} & \Phi_p^{23} \\ \Phi_p^{31} & \Phi_p^{32} & \Phi_p^{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \pi_{t-p}^e \\ i_{t-p} \\ tp_{t-p} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \\ \varepsilon_{3t} \end{bmatrix}$$

其中，係數 $\Phi_p^{ij}$ 表示落後 $p$ 期的第 $j$ 個變數對第 $i$ 個變數的影響。

在估計出VAR模型後，利用衝擊反應函數(impulse response)<sup>6</sup>與變異數分解(variance decomposition)<sup>7</sup>進一步說明三者間的關係。必須注意的是，變數的排列順序將影響衝擊反應函數之估計結果，因此，本文主要採用一般化的衝擊反應函數以解釋變數間的衝擊效果。

<sup>6</sup> 衝擊反應函數係在其他變數衝擊不變下，特定變數衝擊對於內生變數之動態效果。

<sup>7</sup> 變異數分解則係將預測誤差之變異數拆解成不同變數衝擊所造成的比率，即衡量內生變數之波動有多少百分比可以被特定變數衝擊所解釋，亦可說A變數解釋B變數變異之解釋能力。

## 肆、資料變數說明與實證結果

### 一、資料變數說明

本文擷取2003年1月至2016年6月之2年期至30年期臺灣公債殖利率的月資料，先建構連續殖利率曲線後，再利用ACM估計方法拆解殖利率曲線。另外，透過狀態空間模型估計期限貼水，將此估計量與ACM估計方法拆解的估計量做比較。而通膨預期則係以APCF (Asia Pacific Consensus Forecasts) 調查資料為基礎，進而估算各月的預期通膨公布之通膨預期為基準<sup>8</sup>。(見表1)

表1、模型變數與資料來源

變數名稱	資料來源
臺灣2年期公債殖利率	證券櫃檯買賣中心
臺灣5年期公債殖利率	
臺灣7年期公債殖利率	
臺灣10年期公債殖利率	
臺灣20年期公債殖利率	
臺灣30年期公債殖利率	
政策利率 (以隔夜拆款利率為代理變數)	中央銀行
通膨預期	根據APCF調查資料 估算各月通膨預期
10年期期限貼水 (自臺灣10年期公債殖利率萃取而得)	作者自行估計 (以ACM方法估計而得)

### 二、以ACM法設定訊號方程式之估計結果

根據表2所示，除了20年期公債之預期利率係受自身落後期影響外，其餘年期公債之預期利率均會受到政策利率的影響 (C(3)係數

<sup>8</sup> 參考張志揚(2013)，以加權平均的方式，計算各月通膨預期。例如2011年2月時，APCF提供2014年與2015年全年的通膨預測值，則該月對未來12個月的通膨預測值為11/12乘以2014年的通膨預測值加上1/12乘以2015年的通膨預測值。

達統計顯著)，該結果指出政策利率能顯著地影響長期利率，可能係透過利率傳遞機制的有效運作。

此外，模型所設定之狀態方程式均達統計顯著（SV1與SV2），該結果表示針對預期利率與期限貼水所設定之模型尚屬合適，即在ACM估計方法設定之等式下，期限貼水為隨機漫步模型，而預期利率為AR(1)模型。

表2、狀態空間模型之估計結果－以ACM法設定訊號方程式

變數	2年期	5年期	7年期	10年期	20年期	30年期
C(1) (常數項)	0.0201 (9.25*10 <sup>-5</sup> )	0.2805 (6.63*10 <sup>-6</sup> )	0.6704 (2.13*10 <sup>-7</sup> )	0.3074 (1.55*10 <sup>-6</sup> )	0.2161 (3.09*10 <sup>-5</sup> )	0.3921 (5.92*10 <sup>-5</sup> )
C(2) ( $exp_{t-1}$ )	0.2319 (0.2233)	-0.1145 (0.2584)	-0.4186 (0.1960)**	-0.3258 (0.3575)	0.6589 (0.1767)***	0.1910 (0.5199)
C(3) ( $on_t$ )	0.4741 (0.1073)***	0.4451 (0.0879)***	0.2214 (0.0859)**	0.3017 (0.1001)***	-0.0390 (0.0565)	0.2017 (0.0900)**
C(4) ( $var(\mu_{1,t})$ )	1.10E-11 (0.0029)	1.56E-12 (0.0047)	3.29E-12 (0.0031)	5.40E-14 (0.0024)	2.59E-12 (0.0012)	6.33E-13 (0.0070)
C(5) ( $var(\varepsilon_{1,t})$ )	0.0138 (0.0017)***	0.0099 (0.0017)***	0.0114 (0.0025)***	0.0144 (0.0014)***	0.0141 (0.0042)***	0.0141 (0.0036)***
C(6) ( $var(\varepsilon_{2,t})$ )	2.04E-11 (0.0044)	8.87E-13 (0.0038)	1.39E-13 (0.0012)	3.36E-14 (0.0014)	1.41E-11 (0.0045)	1.51E-14 (0.0010)
SV1 (tp)	0.2167 (0.1177)*	0.2170 (0.0993)**	0.2100 (0.1182)*	0.5063 (0.1201)***	0.7473 (0.1187)***	1.1092 (0.1189)***
SV2 (exp)	0.1502 (4.64E-06)***	0.3320 (9.48E-07)***	0.5039 (4.11E-07)***	0.2776 (1.94E-07)***	0.6093 (4.99E-06)***	0.5348 (1.25E-07)***

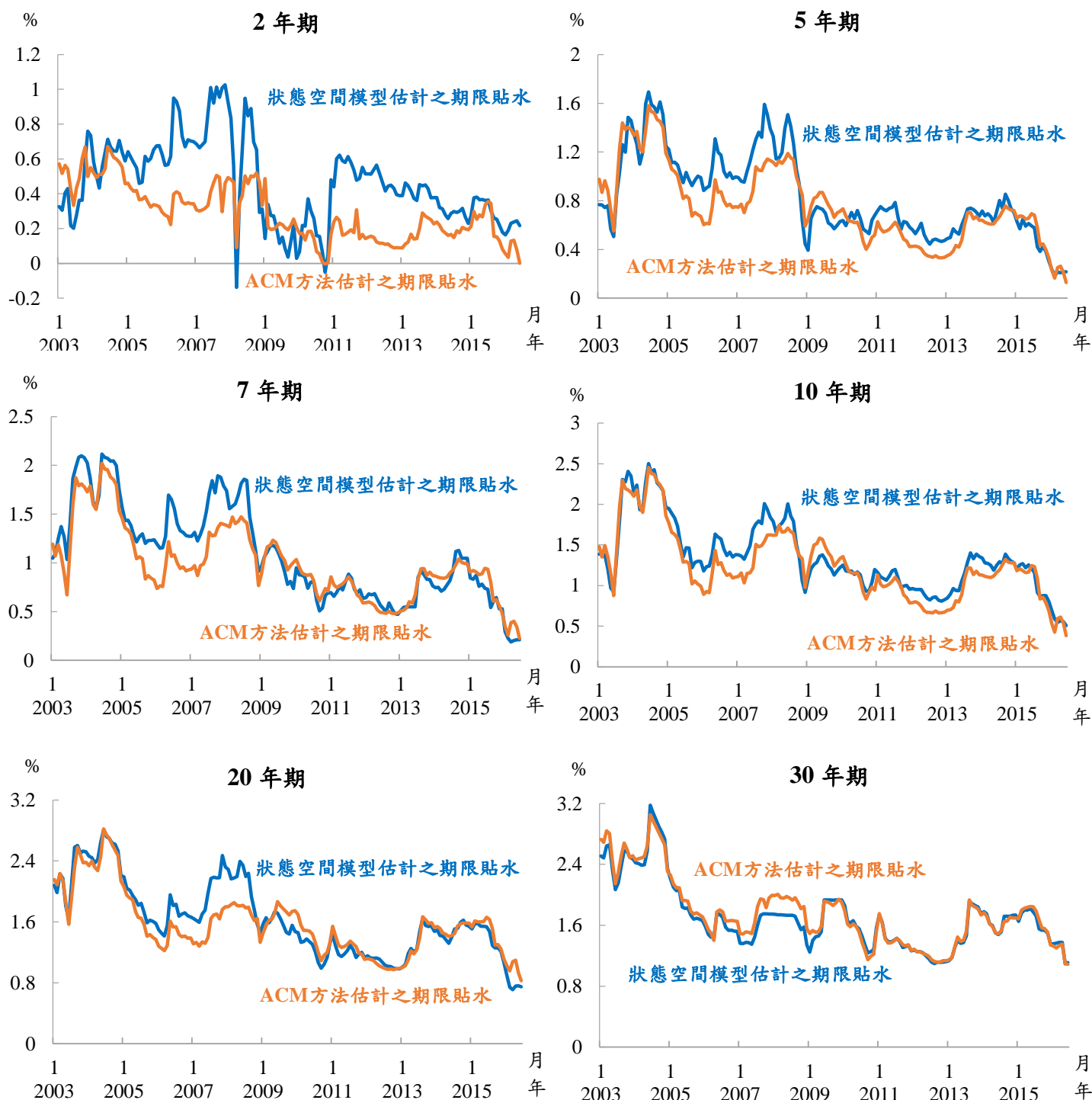
註1：括號中為標準誤，或稱均方根誤差（root mean squared error）。

註2：\*：10%顯著水準、\*\*：5%顯著水準、\*\*\*：1%顯著水準。

再者，檢視ACM估計方法與狀態空間模型估計之期限貼水（見圖3），發現2年期的期限貼水可能會受到其他潛在重要的總體經濟因素影響（如投資人需求變動情形），容易受到市場衝擊而波動，致狀態空間模型所估計之期限貼水未能完整捕捉到所有訊息，致二者估計之水準值差異較大，惟整體而言，該期限貼水之走勢與ACM估計方法之期限貼水約略一致，相關係數約為0.5665。

圖3、ACM估計方法與狀態空間模型（以ACM法設定訊號方程式）

估計之期限貼水



另外，狀態空間模型估計之5年期的期限貼水大體上已能擷取大部分相關資訊，其走勢與ACM估計方法之期限貼水相當一致，相關

係數達0.9083，惟估計之水準值略高。

其餘狀態空間模型估計之期限貼水（7、10、20、30年期），除了全球金融危機前、後外，其走勢與水準值均與ACM估計方法之期限貼水相當貼近，尤以10年期與30年期最為密合，相關係數分別達0.9452與0.9783，可能係因10年期與30年期公債交易情形較為活絡，加以長天期的公債隱含長期經濟基本面之訊息，較不容易受到短期因素之衝擊而大幅波動所致。由此可知，以ACM法設定訊號方程式下，採用狀態空間模型描繪不同到期日之期限貼水，適合捕捉較長天期之期限貼水，因其與基準估計量差異不大。

### 三、以Bernanke法設定訊號方程式之估計結果

本節係以Bernanke (2013)闡述之等式作為訊號方程式，估計期限貼水與通膨預期<sup>9</sup>。實證結果顯示，狀態空間模型估計之期限貼水會高估ACM估計方法的期限貼水，惟尚能捕捉到期限貼水之走勢，相關係數分別為0.6149、0.7464、0.8156、0.8392、0.8748、0.8919。

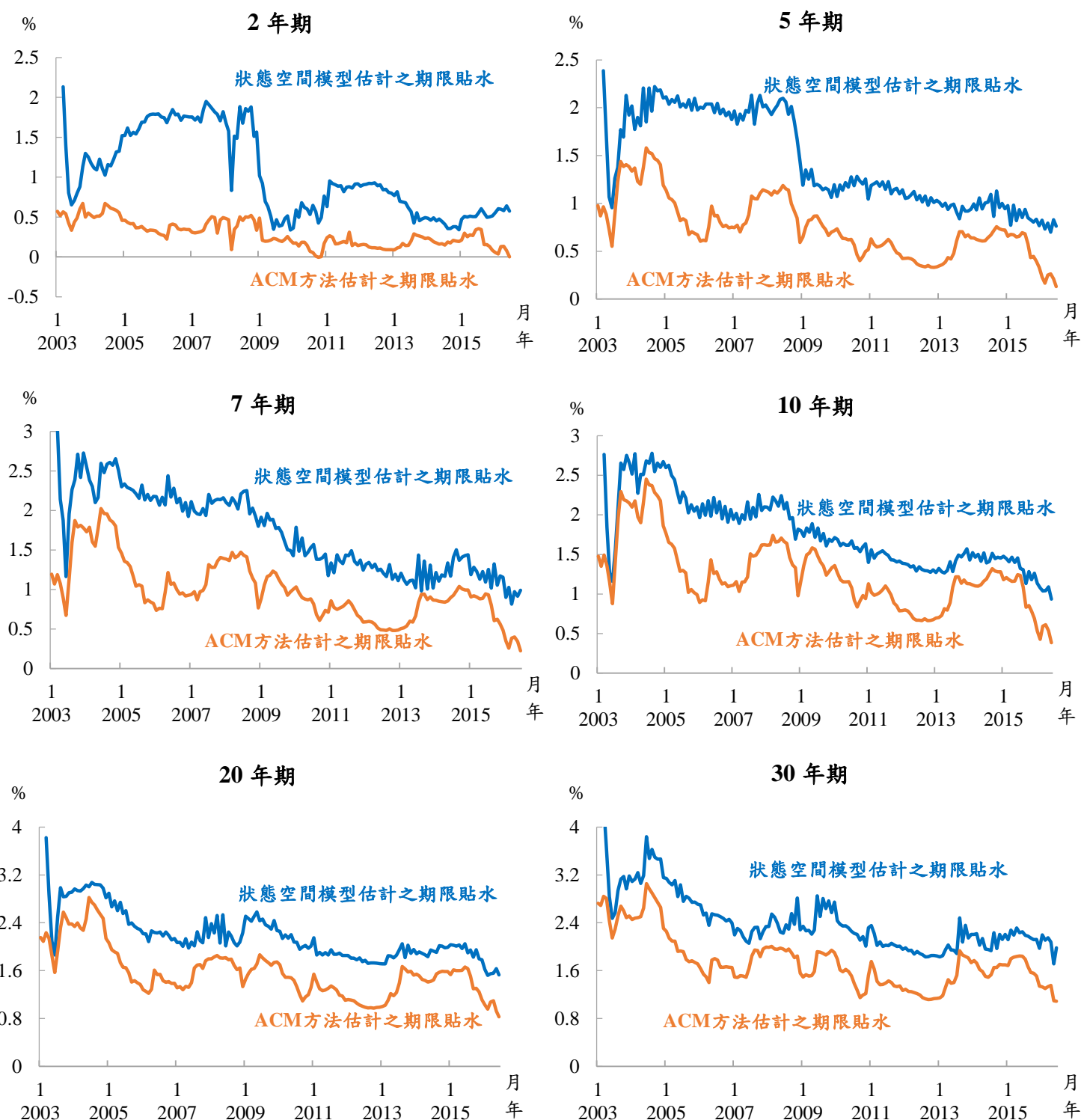
從圖4發現，在描繪2年期與5年期的期限貼水下，因無法捕捉關鍵的潛在因素，導致與期限貼水基準估計量較為偏離，如同表3所示，SV1與SV2未達統計顯著，顯示在Bernanke (2013)設定之等式下，隨機漫步模型未能良好描繪出2年期與5年期之期限貼水，而SV3至SV6均達統計顯著，表示設定隨機漫步模型尚可，係因可捕捉到期限貼水之趨勢。

---

<sup>9</sup> 以Bernanke (2013)所述之等式做為訊號方程式，除了估計期限貼水與通膨預期外，尚須估計預期實質利率，惟預期實質利率非本文欲探討之變數，因此未顯示該實證結果。

圖4、ACM估計方法與狀態空間模型（以Bernanke法設定訊號方程式）

估計之期限貼水





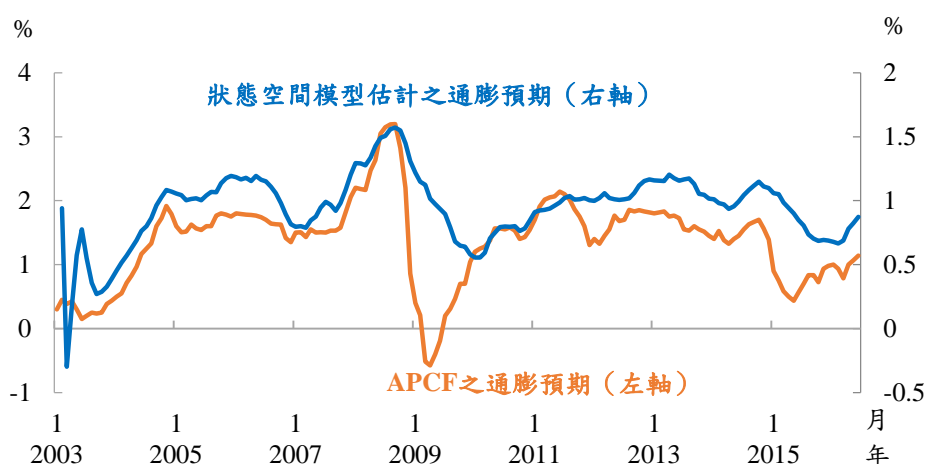
另外，表3結果指出，當期通膨預期主要係受到前期通膨預期的影響，惟前期實際通膨率對當期通膨預期影響並不顯著，加以SV8達統計顯著，可知在設定Bernanke等式下，設定通膨預期為AR(1)模型尚屬合理。

表3、狀態空間模型之估計結果—以Bernanke法設定訊號方程式

變數	係數	變數	係數	變數	係數
C(1) (常數項)	0.1240 (72671.80)	C(16) ( $\text{var}(\varepsilon_{4,t})$ )	0.0739 (3.02E-07)***	C(31) ( $\text{cov}(\mu_{3,t}, \mu_{5,t})$ )	0.0807 (1.64E-09)***
C(2) ( $\text{cpi}_{t-1}^e$ )	0.8472 (0.3421)**	C(17) ( $\text{var}(\varepsilon_{5,t})$ )	0.0763 (5.55E-07)***	C(32) ( $\text{cov}(\mu_{3,t}, \mu_{6,t})$ )	0.0811 (1.28E-05)***
C(3) ( $\pi_{t-1}$ )	0.0320 (0.3541)	C(18) ( $\text{var}(\varepsilon_{6,t})$ )	0.0741 (0.0017)***	C(33) ( $\text{cov}(\mu_{4,t}, \mu_{5,t})$ )	0.0831 (3.12E-06)***
C(4) (常數項)	-0.1766 (83923.72)	C(19) ( $\text{var}(\varepsilon_{7,t})$ )	0.0787 (3.1630)	C(34) ( $\text{cov}(\mu_{4,t}, \mu_{6,t})$ )	0.0853 (2.18E-05)***
C(5) ( $\text{real}_{t-1}^e$ )	0.8472 (0.4574)*	C(20) ( $\text{var}(\varepsilon_{8,t})$ )	0.0793 (3.1628)	C(35) ( $\text{cov}(\mu_{5,t}, \mu_{6,t})$ )	0.0820 (6.97E-06)***
C(6) ( $\text{cbc}_{rate,t-1} - \pi_{t-1}$ )	0.0416 (0.3746)	C(21) ( $\text{cov}(\mu_{1,t}, \mu_{2,t})$ )	0.0835 (5.77E-07)***	SV1 (tp2)	0.5756 (0.5481)
C(7) ( $\text{var}(\mu_{1,t})$ )	0.0755 (0.0112)***	C(22) ( $\text{cov}(\mu_{1,t}, \mu_{3,t})$ )	0.0811 (2.06E-06)***	SV2 (tp5)	0.7625 (0.5325)
C(8) ( $\text{var}(\mu_{2,t})$ )	0.0706 (5.25E-07)***	C(23) ( $\text{cov}(\mu_{1,t}, \mu_{4,t})$ )	0.0822 (9.36E-06)***	SV3 (tp7)	0.9914 (0.5265)*
C(9) ( $\text{var}(\mu_{3,t})$ )	0.0608 (9.06E-06)***	C(24) ( $\text{cov}(\mu_{1,t}, \mu_{5,t})$ )	0.0861 (1.09E-07)***	SV4 (tp10)	0.9354 (0.5321)*
C(10) ( $\text{var}(\mu_{4,t})$ )	0.0726 (2.81E-07)***	C(25) ( $\text{cov}(\mu_{1,t}, \mu_{6,t})$ )	0.0834 (4.85E-05)***	SV5 (tp20)	1.5273 (0.5310)***
C(11) ( $\text{var}(\mu_{5,t})$ )	0.0645 (1.25E-05)***	C(26) ( $\text{cov}(\mu_{2,t}, \mu_{3,t})$ )	0.0842 (5.94E-06)***	SV6 (tp30)	1.9822 (0.5298)***
C(12) ( $\text{var}(\mu_{6,t})$ )	0.0645 (1.25E-05)***	C(27) ( $\text{cov}(\mu_{2,t}, \mu_{4,t})$ )	0.0898 (8.23E-07)***	SV7 (real)	-1.0780 (0.4758)**
C(13) ( $\text{var}(\varepsilon_{1,t})$ )	0.0783 (0.0447)*	C(28) ( $\text{cov}(\mu_{2,t}, \mu_{5,t})$ )	0.0838 (2.00E-05)***	SV8 ( $\text{cpi}^e$ )	0.9023 (0.4744)*
C(14) ( $\text{var}(\varepsilon_{2,t})$ )	0.0756 (2.24E-07)***	C(29) ( $\text{cov}(\mu_{2,t}, \mu_{6,t})$ )	0.0850 (1.73E-07)***		
C(15) ( $\text{var}(\varepsilon_{3,t})$ )	0.0084 (0.0031)***	C(30) ( $\text{cov}(\mu_{3,t}, \mu_{4,t})$ )	0.0848 (3.32E-08)***		

再者，根據圖5檢視狀態空間模型估計的通膨預期，其水準值都較APCF公布之通膨預期值來的低，惟走勢大抵一致，相關係數為0.6580。

圖5、APCF與狀態空間模型估計之通膨預期



基於上述結果，以Bernanke (2013)所述之等式為訊號方程式下，由於沒有額外有用的資訊，加以所須估計之不可觀測之變數較多，致採用狀態空間模型無法良好描繪期限貼水與通膨預期。

#### 四、VAR模型之估計結果

如同前言所提及，通膨預期與期限貼水間之關係相當密切，加以泰勒法則認為央行的決策會參考產出與通膨等變數。因此，本節試著將隔拆利率、10年期期限貼水<sup>10</sup>與通膨預期進行VAR模型配適，以找出三者間之關係。在最大落後期數為20期下，AIC與FPE準則指出最適落後期為3期。

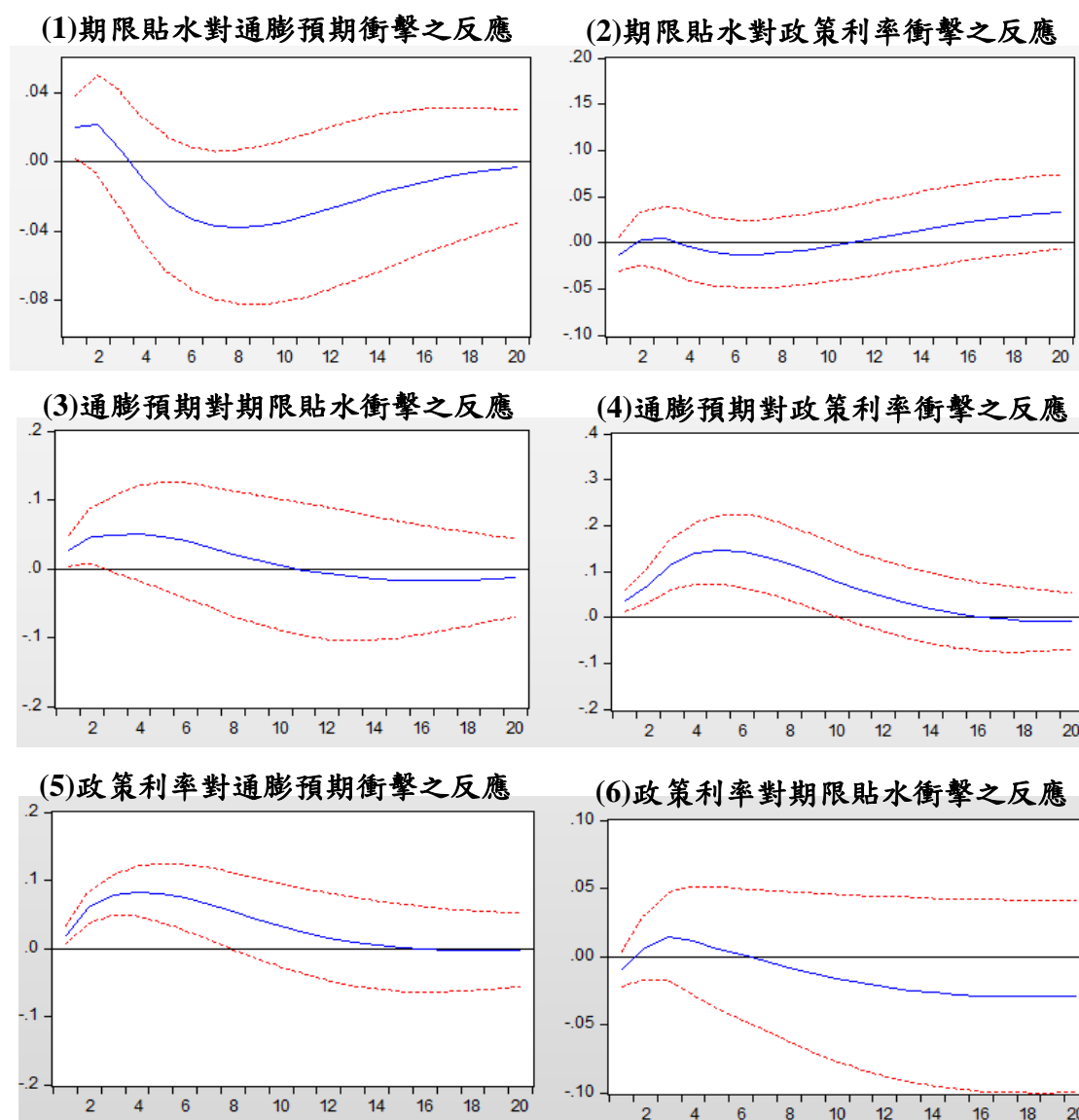
一般化之衝擊反應函數<sup>11</sup>之結果顯示（見圖6），期限貼水對通膨

<sup>10</sup> 由ACM方法取得。另外，本文亦改採狀態空間模型估計之10年期期限貼水，惟結果差異不大。

<sup>11</sup> 由於變數排序會影響衝擊反應函數之結果，因此，本文採一般化（generalized）之衝擊反應函數作為結果。另外，若依序以通膨預期、政策利率、期限貼水排序，而衝擊反應函數之結果與一般化之衝擊反應函數結果差異不大。因此，於變異數分解下，則採此排列順序作為估計結果。

預期之衝擊於落後1期有顯著的正向反應，假設當前景氣低迷，期限貼水之水準下降，則預期通膨亦會處於低水準。而通膨預期對期限貼水之衝擊於落後1、2期呈現顯著的正向反應，係因當預期通膨增加時，投資人要求的風險補償亦會提高，因此，拉抬了期限貼水。該結果與Wright (2008)指出通膨預期與期限貼水間存在強烈的正相關一致。另外，Granger因果檢定指出Wald檢定統計量分別為9.8575、9.4696，均達5%的顯著水準，可知二者互為Granger因果關係。

圖6、衝擊反應函數



再者，政策利率對通膨預期之衝擊於落後1至7期均為顯著的正向反應，該結果與泰勒法則主張「央行之利率決策主要參考產出與通膨等總體變數」一致<sup>12</sup>。此外，雖然期限貼水對政策利率衝擊的直接反應並不顯著，惟文獻指出傳統貨幣政策可藉由利率傳遞機制間接地對期限貼水產生影響（見蔡釗旻（2016））。

根據美國Fed之經驗指出當政策利率接近零底限時，藉由非傳統貨幣政策（量化寬鬆、前瞻指引）可對期限貼水產生直接的影響。舉例而言，美國採行非傳統貨幣政策的原因係在全球金融危機發生之前，美國多次降息，但長期利率變動幅度不大，對此，Bernanke發表聲明，認為係期限貼水仍高所致。然而，在全球金融危機期間，政策利率趨近於零底限，為有效降低長期利率，而採行量化寬鬆政策，試圖壓低期限貼水，造成長期利率下滑，進而使利率傳遞機制能夠有效運作。可見，非傳統貨幣政策能夠直接對期限貼水產生顯著的影響，而在低利率環境下，傳統貨幣政策對期限貼水的直接效果並不顯著。

從表4變異數分解結果<sup>13</sup>來看，變數本身能夠解釋自身變異的能力最大。再者，通膨預期對期限貼水變異之解釋能力約0%~15.49%，而期限貼水對通膨預期變異之解釋能力較小，約2.98%~4.04%。該結果呼應文獻上指出期限貼水通常隱含通膨預期之資訊。再者，通膨預期能夠解釋政策利率變異之能力約6.86%~26.18%，此結果與衝擊反應結果、泰勒法則一致。

---

<sup>12</sup> 通膨預期對政策利率之衝擊為正向反應，此可能係因政策利率上升，代表著央行對於未來景氣的看法較正面，導致人民認為未來景氣較佳，對未來通膨之預期亦會增加。

<sup>13</sup> 如同註解11所述，變異數分解之結果係以通膨預期、政策利率、期限貼水之排序估計而得。

表4、變異數分解

期間 (月)	期限貼水			通膨預期			政策利率		
	自身 衝擊	通膨 預期 衝擊	政策 利率 衝擊	期限 貼水 衝擊	自身 衝擊	政策 利率 衝擊	期限 貼水 衝擊	通膨 預期 衝擊	自身 衝擊
1	100	0	0	3.09	96.91	0	1.21	6.86	91.93
4	96.06	1.91	2.03	4.04	90.17	5.79	0.69	26.18	73.13
8	87.55	10.71	1.74	3.24	86.12	10.64	0.39	25.27	74.34
12	82.67	15.01	2.32	2.98	84.98	12.04	0.97	21.01	78.02
16	80.05	15.49	4.45	3.16	84.69	12.15	2.10	17.96	79.94
20	77.13	14.85	8.03	3.35	84.53	12.12	3.22	16.01	80.77

## 伍、結論與建議

### 一、結論

本文實證結果發現（見圖7），當期限貼水大幅提高時，投資人對於未來經濟景氣與通膨之不確定性提高，因此，投資人將額外增加對資產要求之補償或貼水，此即隱含（1）經濟景氣不確定性攀升，下行風險可能提高；（2）通膨疑慮上升，如同Bernanke (2013)所述，由此可見期限貼水之重要性。<sup>14</sup>

<sup>14</sup> 多數文獻（Hamilton and Kim (2002)、Favero et al. (2005)、Wright (2006)）發現期限貼水下降通常係較低的經濟成長所致。根據圖7所示，期限貼水變動量於2003年7、8月大幅攀升，係因2003年第2季經濟受SARS疫情影響為負成長，市場對經濟前景不確定疑慮攀升，惟疫情很快受到控制，第3季經濟轉為正成長，期限貼水變動量亦自9月下滑。再者，美國次級房貸、全球金融危機與歐債危機等事件發生後，引發投資人對未來經濟不確定性提高，致期限貼水變動量大幅增加，而後因經濟步入衰退，致期限貼水變動量大幅減少。至於2013年下半年攀升，此可能與美國Fed宣布緊縮政策而造成之恐慌有關（taper tantrum）。近期，期限貼水變動量下降幅度明顯且維持低檔可能係因國際油價大幅下跌所致，惟至2016年3月期限貼水受到全球金融經濟情勢動盪與中國大陸經濟成長疲軟，連帶影響國內經濟成長前景不佳，而再度攀升。

圖7、臺灣長期期限貼水變動量（以10年期為例）



本文透過狀態空間模型描繪期限貼水與通膨預期，並以ACM估計方法分解之期限貼水與APCF公布之通膨預測值為基準，以檢視兩個估計量是否合宜，結果發現利用該式：「殖利率=期限貼水+預期利率」來設定訊號方程式，則狀態空間模型較能夠準確地描繪出期限貼水，惟2年期公債殖利率會受到其他短期顯著因素（如投資人需求與預期）影響，致狀態空間模型未能準確地描繪出2年期之期限貼水。

然而，以Bernanke (2013)主張之等式作為訊號方程式來進行狀態空間模型估計。結果指出，狀態空間模型估計的未能觀測之變數僅能捕捉到變數之趨勢，可能係因在該訊號方程式下，所估計之未能觀測的變數較多，若未提供其他額外有用的資訊，則狀態空間模型較無法良好描繪未能觀測之變數。

最後，本文透過VAR模型找出通膨預期、政策利率與期限貼水，三者間之關係。實證發現，期限貼水與通膨預期間互為Granger因果關係

；另外，政策利率雖無法直接影響期限貼水，惟可透過利率傳遞機制間接地對期限貼水產生影響。此外，央行的利率決策會受到通膨預期的影響，與泰勒法則一致。

## 二、建議

目前美國紐約聯邦準備銀行利用ACM估計方法將殖利率曲線拆解期限貼水與預期利率，以公布每天10年期期限貼水估計量。而英國則是透過該法來檢視央行錨定通膨目標之可信度與控制通膨之能力。

根據本文實證結果發現，期限貼水與通膨預期、經濟情勢、政策利率息息相關，可見利用模型描繪出期限貼水有其必要性。

本文透過兩種方法試圖描繪出臺灣不同天期的期限貼水，發現二者均可合理描繪出期限貼水。因此，似可仿效美國作法估計每天10年期期限貼水之估計量，進而研究貨幣政策如何能直接有效影響期限貼水，以強化利率傳遞機制的運作，緩衝國際情勢過度動盪對國內經濟景氣所造成的影響。

## 參考文獻

- 徐士勛 (2016), 「我國中性實質利率之研究」, 臺灣票據交換所之委託研究計劃。
- 張志揚 (2014), 「臺灣地區通膨預期與總體變數動態關係之探討」, 《中央銀行季刊》, 第三十六卷第四期, 頁51-74。
- 蔡鈞旻 (2016), 「臺灣殖利率曲線建構與分析, 並驗證利率傳遞機制—兼論台美利率脫鉤之潛在原因」, 中央銀行經濟研究處研究報告。
- Adrian T., R. K. Crump and E. Moench (2013), “Pricing the Term Structure with Linear Regressions,” *Journal of Financial Economics*, Vol. 110, No. 1, pp. 110–138.
- Ang A. and Piazzesi M. (2003), “A No–Arbitrage Vector Autoregression of Term Structure Dynamics with Macroeconomic and Latent Variables,” *Journal of Monetary Economics*, Vol. 50, No. 4, pp. 745–787.
- Bernanke B. S. (2006), “Reflections on the Yield Curve and Monetary Policy,” Board of Governors of the Federal Reserve System, March 20.
- Bernanke B. S. (2013), “Long–Term Interest Rate,” Speech, Federal Reserve Bank of San Francisco, California.
- BI Institute (2016), 「Macrofinancial Modelling and Analysis」研習講義。
- Blake A. P., G. R. Rule and O. R. Rummel (2015), “Inflation Targeting and Term Premia Estimates for Latin America,” *Latin American Economic Review*, Vol. 24, No. 3, pp. 1–21.
- Favero C. A., I. Kaminska and U. Söderström (2005), “The Predictive



Power of the Yield Spread: Further Evidence and a Structural Interpretation,” CEPR Discussion Paper, No. 4910.

Hamilton J. D. and D. H. Kim (2002), “A Reexamination of the Predictability of Economic Activity Using the Yield Spread,” *Journal of Money, Credit and Banking*, Vol. 34, No. 2, pp. 340–360.

Kim J. and J. Lee (2013), “How Important are Inflation Expectations in Driving Asian Inflation?” BIS paper No. 70f.

Nelson, C. R., and Siegel, A. F. (1987), “Parsimonious Modeling of Yield Curves,” *Journal of Business*, Vol. 60, pp. 473–489.

Rummel, O. (2016), “First-generation dynamic factor models, the state-space approach and E-Views”, Bank of England , 研習講義。

Wright J. H. (2006), “The Yield Curve and Predicting Recessions,” Federal Reserve Bank of New York Working paper.

Wright J. H. (2008), “Term Premium and Inflation Uncertainty: Empirical Evidence from an International Panel Dataset,” Federal Reserve Bank, Washington, D.C. Working paper.

## 附錄一、仿射模型與ACM估計方法

### 一、仿射模型

主要參考Ang and Piazzesi (2003)、Adrian et al. (2013)與Blake et al. (2015)。首先假設「期限貼水係唯一的風險補償來源」，並存在某些因子驅動著殖利率曲線，而每條殖利率曲線取決於可觀察到的價格因子集合 $Z_t$ ，其為總體因子或狀態變數 (state variables)，而渠等因子可透過VAR(1)以模型化，如等式 (1) 所示：

$$Z_{t+1} = \mu + \Phi Z_t + v_{t+1}, \text{ 其中殘差 } v_{t+1} \sim N(0, \Sigma) \dots \dots \dots (1)$$

將等式 (1) 中可觀察到之價格因子 $Z_t$  作為利率期限結構之主成分。接著，決定債券價格：首先假設債券市場不存在套利 (no-arbitrage) 機會，再利用隱含在殖利率曲線中的遞迴結構來建構價格等式，即資產評價等式： $P_t^n = E_t[M_{t+1}P_{t+1}^{n-1}] \dots \dots \dots (2)^{15}$

其中， $P_t^n$  為在 $t$ 期時點下，到期日為 $n$ 期的零息債券價格，而 $M_{t+1}$  為訂價核心 (pricing kernel) 亦為隨機折現因子。假設 $k = \ln K$ ，則 $E_t[K] = E_t[k] + 1/2 \sigma_{k,t}^2$ <sup>16</sup>，在等式成立下，將該等式代入等式 (2) 並取自然對數，可改寫為等式 (3)。

$$p_t^n = E_t[m_{t+1} + p_{t+1}^{n-1}] + \frac{1}{2} \text{var}_t[m_{t+1} + p_{t+1}^{n-1}] \dots \dots \dots (3)$$

$$\text{給定風險價格 } \lambda_t \text{ (risk-pricing terms) 為 } \Sigma^{-1/2}(\lambda_0 + \lambda_1 Z_t) \dots (4)$$

，因此，將對數隨機折現因子 ( $m_{t+1}$ ) 定義為

$$m_{t+1} = -f_t - 1/2 \lambda_t' \lambda_t - \lambda_t' \Sigma^{-1/2} v_{t+1} \dots \dots \dots (5)$$

其中，無風險利率 ( $f_t$ ) 等於 $\ln P_t^1$ ，即 $t$ 時點下，到期日為1期之對數零息債券價格，即 $p_t^1$ ，並將無風險利率 ( $f_t$ ) 模型化為

<sup>15</sup> 由Rudebusch et al. (2007)提出。

<sup>16</sup> 此即期望值的對數與對數的期望值之間的關係為 $\ln E(x) = E[\ln(x)] + 1/2 * \text{var}[\ln(x)]$ 。

$$f_t = \delta_0 + \delta'_1 Z_t \dots\dots\dots (6)$$

此外，假設對數債券價格本身在狀態變數中可被仿射，則可表示為： $p_t^n = -A_n - B'_n Z_t \dots\dots\dots (7)$

由於等式(3)與等式(7)兩者相等，再代入等式(5)與等式(6)整理後可得價格因子 $Z_t$ 的仿射函數，如下所示：

$$\begin{aligned} A_n + B'_n Z_t &= -E_t \left[ -f_t - \frac{1}{2} \lambda'_t \lambda_t - \lambda'_t \sum^{-\frac{1}{2}} v_{t+1} - A_{n-1} - B'_{n-1} Z_{t+1} \right] \\ &\quad - \frac{1}{2} \text{var}_t \left[ -f_t - \frac{1}{2} \lambda'_t \lambda_t - \lambda'_t \sum^{-\frac{1}{2}} v_{t+1} - A_{n-1} - B'_{n-1} Z_{t+1} \right] \\ &= f_t + \frac{1}{2} \lambda'_t \lambda_t + A_{n-1} + B'_{n-1} \Phi Z_t - \frac{1}{2} \text{var}_t [(\lambda'_t + B'_{n-1}) \sum^{-1/2} v_{t+1}] \\ &= f_t + \frac{1}{2} \lambda'_t \lambda_t + A_{n-1} + B'_{n-1} \Phi Z_t - \frac{1}{2} (\lambda'_t + B'_{n-1}) \sum^{-1} (\lambda_t + B_{n-1}) \\ &= \left( \delta_0 + A_{n-1} - \frac{1}{2} B'_{n-1} \sum B_{n-1} \right) + (\delta'_1 + B'_{n-1} \Phi) Z_t - B'_{n-1} \sum \lambda_t \dots (8) \end{aligned}$$

$$\text{因此，可得矩陣 } A_n = \delta_0 + A_{n-1} - B'_{n-1} \sum \lambda_0 - \frac{1}{2} B'_{n-1} \sum B_{n-1} \dots (9)$$

$$\text{矩陣 } B_n = \delta'_1 + B'_{n-1} (\Phi - \sum \lambda'_1) \dots\dots\dots (10)$$

同樣地，藉由設定風險價格 $\lambda_0$ 與 $\lambda_1$ 為0，則可衍生出風險中立殖利率曲線，因此，矩陣 $A_n = \delta_0 + A_{n-1} - 1/2 B'_{n-1} \sum B_{n-1}$ ；矩陣 $B_n = \delta'_1 + B'_{n-1} \Phi$ ，藉此計算出預期價格。

## 二、ACM估計方法<sup>17</sup>

ACM估計方法係由Adrian et al. (2013)所提出，上述模型有多個參數需要估計，在適當的認定限制 (identifying restrictions) 下，可藉由最大概似法來估計。假設價格因子集合 $Z_t$ 是可觀察到的，其可透過採用期限結構之主成分分析而取得。再者，作者定義了事後持

<sup>17</sup> 文獻上以三位作者的姓 (Adrian, Crump, Moench) 合稱為ACM估計方法。

有期間之超額報酬 (*ex-post* holding period excess return) :

$$er_{t+1}^{n-1} = \ln P_{t+1}^{n-1} - \ln P_t^n - f_t \dots \dots \dots (11)$$

該式意味著下一期持有到期日為n-1期之債券的超額報酬等於下一期持有到期日為n-1期之對數債券價格與本期持有到期日為n期之對數債券價格的價格變動量，再扣除本期無風險利率 ( $f_t$ )。將等式 (5) 與等式 (11) 代入等式 (2)，可求得等式 (12)。

$$1 = E_t[\exp(er_{t+1}^{n-1} - \frac{1}{2}\lambda_t'\lambda_t - \lambda_t'\Sigma^{-1/2}v_{t+1})] \dots \dots \dots (12)$$

假設事後持有期間之超額報酬與 $Z_t$ 殘差項 ( $er_{t+1}^{n-1}, v_{t+1}$ )，為聯合常態分配，則事後持有期間之超額報酬的期望值可表示如下：

$$E_t[er_{t+1}^{n-1}] = cov_t[er_{t+1}^{n-1}, v_{t+1}'\Sigma^{-1/2}\lambda_t] - \frac{1}{2}Var_t[er_{t+1}^{n-1}] \dots \dots \dots (13)$$

將 $\beta_t^{n-1}$ 定義為事後持有期間之超額報酬與 $Z_t$ 殘差項的共變項，表示成 $\Sigma^{-1/2}cov_t[(v_{t+1}', (er_{t+1}^{n-1})']$ ，接著，將等式 (4) 代入，因此，可將等式 (13) 改寫如下：

$$E_t[er_{t+1}^{n-1}] = (\beta_t^{n-1})'(\lambda_0 + \lambda_1 Z_t) - \frac{1}{2}Var_t[er_{t+1}^{n-1}] \dots \dots \dots (14)$$

此外，我們可以將非預期超額報酬分解為與 $Z_t$ 殘差項 ( $v_{t+1}$ ) 相關之組成項目以及其它組成項目，以等式 (15) 表示如下：

$$er_{t+1}^{n-1} - E_t[er_{t+1}^{n-1}] = (\beta_t^{n-1})'v_{t+1} + e_{t+1}^{n-1} \dots \dots \dots (15)$$

其中 $e_{t+1}^{n-1}$ 為評價誤差 (pricing errors)。而該報酬產生過程便可從等式 (15) 表示為等式 (16)，意味著超額報酬為預期報酬扣除債券凸性<sup>18</sup>調整項，再加上評價衝擊與評價誤差之等式。

<sup>18</sup> 考慮債券凸性下，利率下跌使債券價格上漲的幅度高於利率上漲使債券價格下跌的幅度。

$$er_{t+1}^{n-1} = \underbrace{(\beta_t^{n-1})'}_{\text{超額報酬}} \underbrace{(\lambda_0 + \lambda_1 Z_t)}_{\text{預期報酬}} - \underbrace{\frac{1}{2}[(\beta_t^{n-1})' \Sigma(\beta_t^{n-1}) + \sigma^2]}_{\text{債券凸性調整項}} + \underbrace{(\beta_t^{n-1})' v_{t+1}}_{\text{評價衝擊}} + \underbrace{e_{t+1}^{n-1}}_{\text{評價誤差}} \quad (16)$$

(Excess return) (Expected return) (Convexity adjustment) (Priced innovation) (Error)

該表達方式係ACM估計方法之步驟設定之關鍵，其指出採取n個期限結構之主成分，並以此作為可觀察到價格因子集合 $Z_t$ 。此外，我們可以透過適當地參數化評價曲線（如，Nelson–Siegel模型）以計算超額報酬（ $er_{t+1}^{n-1}$ ）。以下將說明ACM估計方法的3個主要估計步驟：

1. 利用主成分分析法（principal components analysis, PCA）擷取主要成分（本文擷取4個主成分<sup>19</sup>）。接著，根據等式（1）進行VAR(1)，以取得估計殘差 $\widehat{v}_{t+1}$ 與包含在債券凸性調整項中的殘差共變量。
2. 以OLS估計等式： $er_{t+1}^{n-1} = a + cZ_t + (\beta_t^{n-1})' \widehat{v}_{t+1} + e_{t+1}^{n-1}$ ，以獲得估計量 $\widehat{a}$ 、 $\widehat{c}$ 、 $\widehat{\beta}$ 與 $\widehat{\sigma}$ 。（標準差 $\widehat{\sigma} = \text{trace}(\widehat{e}\widehat{e}')/T$ ，T為樣本數）
3. 由等式（16）可知， $(\beta_t^{n-1})' \lambda_0 - 1/2[(\beta_t^{n-1})' \Sigma(\beta_t^{n-1}) + \sigma^2] = a$ 、 $(\beta_t^{n-1})' \lambda_1 = c$ ，給定此兩等式，便可以透過下列等式（17）與等式（18）來估計風險價格，同樣地，設定風險價格 $\lambda_0$ 與 $\lambda_1$ 為0，則可衍生出風險中立殖利率曲線。

$$\widehat{\lambda}_0 = [\widehat{\beta}_t^{n-1} (\widehat{\beta}_t^{n-1})']^{-1} (\widehat{\beta}_t^{n-1})' \{ \widehat{a} + \frac{1}{2} [(\beta_t^{n-1})' \Sigma(\beta_t^{n-1}) + \sigma^2] \} \dots \quad (17)$$

$$\widehat{\lambda}_1 = [\widehat{\beta}_t^{n-1} (\widehat{\beta}_t^{n-1})']^{-1} (\widehat{\beta}_t^{n-1})' \widehat{c} \dots \dots \dots \quad (18)$$

<sup>19</sup> Adrian et al. (2013)選取5個主成分，惟其使用Nelson–Siegel–Svensson模型建構殖利率曲線，而Blake et al. (2015)選取4個主成分作為結果，因為選取4個或5個主成分，二者結果差異不大。本文擷取4個主成分係根據 $R^2$ 結果，在擷取3個主成分下， $R^2$ 為0.8812；在擷取4個主成分下， $R^2$ 為0.9945；在擷取5個主成分下， $R^2$ 為0.9997，因此，取4個主成分。

## 附錄二、狀態空間模型估計之預期利率

