出國報告（出國類別：其他）

參加BIS 投資組合分析研討會
心得報告書

服務機關：中央銀行

姓名職稱：葉峻源(倫敦辦事處/辦事員）

派赴國家：瑞士

出國期間：105 年 6 月 12 日至 6 月 17 日

報告日期：105 年 9 月 2 日

目 錄

壹、前言

本次國際清算銀行(BIS)於瑞士 Brunnen 舉辦為期 5 天之投資組合分析研討會(the Portfolio Analytics Seminar)，與會者包括 Fed、ECB、SAFE、德國、阿根廷、日本及韓國等各國央行的前、中、後台人員，並邀請 BIS 投資管理部門主管 Alex Joia 及世界銀行(World Bank)風控主管 David Jamieson Bolder 負責本次會議的主講；在本次研討會進行過程中，講師每日以分組競賽方式進行總結，讓學員有實際分析的機會，透過加入或消除投資組合內個別債券，加深與會者對投資組合分析的印象。

由於會議的主軸環繞在固定收益投資組合的報酬來源及風險分析，故主講者一開始即針對影響固定收益投資組合的曝險因子進行數學推導及拆解，並運用泰勒展開式解釋報酬率來源，得到了固定收益投資組合的報酬來源包含時間報酬(carry return)、公債殖利率曲線變動報酬(curve return)、信用報酬(credit return)、凸性報酬(convexity return)、匯率變化(FX return)等因子，做為經理人在追蹤投資組合表現時的基本依據；其中針對公債殖利率曲線變動報酬，另外介紹了 The Nelson Siegel 模型分析法、關鍵殖利率分析法及特殊定義分析法等三種方式，進一步解釋公債殖利率曲線變動報酬之來源，希望讓學員對殖利率曲線變動之影響因子有進一步認識。

本篇報告係針對該行拆解影響投資組合報酬來源之分析方式做介紹，若有疏漏之處，尚盼長官、同仁不吝賜教，謝謝。

貳、固定收益投資組合之曝險來源

一、債券對殖利率的敏感度

(一) 債券的存續期間(duration)

債券價值係對未來現金流量現值的加總，公式如下：

$$V(t,y)=\sum_{i=1}^{I}\frac{C_{t_i}}{(1+y)^{t_i-t}}$$

其中y代表殖利率，t 為時間，C 則為現金流量。對殖利率進行偏微分，以推導殖利率與債券價格的關係如下：

$$\begin{aligned}\frac{\partial V(t,y)}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\sum_{i=1}^{I}\frac{c_{t_i}}{(1+y)^{t_i-t}}\right),\\ &= -\frac{1}{(1+y)}\sum_{i=1}^{I}\frac{(t_i-t)\,c_{t_i}}{(1+y)^{t_i-t}}.\end{aligned}$$

由以上推導結果可知，殖利率與債券價格呈現反向關係，殖利率上升將使債券價格下跌，殖利率下滑則將使債券價格上漲；殖利率變動對債券價格之影響即為債券的存續期間，我們再將上式兩邊各除以債券價格以利分析比較，最後得到債券的修正存續期間（modified duration）：

$$D_M = -\frac{1}{V(t,y)}\frac{\partial V(t,y)}{\partial y} = +\underbrace{\frac{1}{V(1+y)}\sum_{i=1}^{I}\frac{(t_i-t)\,c_{t_i}}{(1+y)^{t_i-t}}}_{\text{Typically quoted positive}}$$

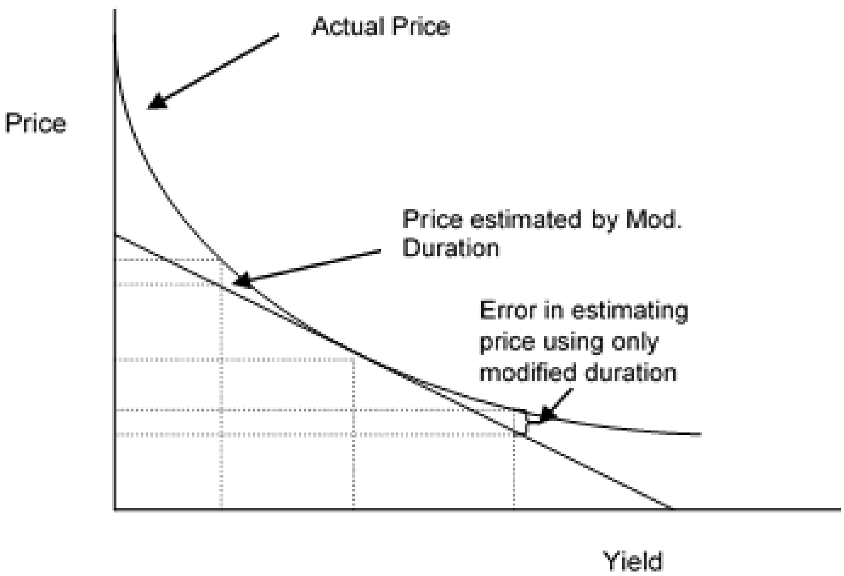
$$D_M \approx -\frac{1}{V(t,y)}\frac{\overbrace{V(t,y+\Delta y)-V(t,y)}^{\Delta V}}{\Delta y}$$

$$-D_M\Delta y \approx \boxed{\frac{\Delta V}{V(t,y)}}$$

由上式可知，修正存續期間的基本定義為殖利率微小變動一單位對投資組合報酬變動的影響。

（二）債券的凸性(convexity)

圖一、債券價格與殖利率關係圖



由於債券與殖利率間的變動並非線性，故我們必須計算債券價格與殖利率間的凸性關係，才能精確計算債券與

殖利率間的變化；我們先對殖利率做二次偏微分：

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial V(t,y)}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{1}{(1+y)}\sum_{i=1}^{I}\frac{(t_i-t)\,c_{t_i}}{(1+y)^{t_i-t}}\right)$$

$$\frac{\partial^2 V(t,y)}{\partial y^2} = \frac{1}{(1+y)^2}\sum_{i=1}^{I}\frac{(t_i-t)^2\,c_{t_i}}{(1+y)^{t_i-t}}.$$

將式子兩邊除以債券價格，則可得到債券的凸性：

$$C = \frac{1}{V(t,y)}\frac{\partial^2 V(t,y)}{\partial y^2} = \underbrace{\frac{1}{V(t,y)(1+y)}\frac{1}{(1+y)^2}\sum_{i=1}^{I}\frac{(t_i-t)^2\,c_{t_i}}{(1+y)^{t_i-t}}}_{\text{Always positive}}$$

$$C \approx \frac{1}{V(t,y)}\frac{\overbrace{V'(t,y+\Delta y)-V'(t,y)}^{\Delta V'}}{\Delta y}$$

$$C\Delta y \approx \boxed{\frac{\Delta V'}{V(t,y)}}$$

分析殖利率對報酬率的影響時，若只看一次偏微分後的結果，誤差值可能較大，考慮凸性後則可將其降低。

二、時間（carry）

將債券價格以連續函數表達，並對時間進行偏微分，以觀察其對報酬的影響：

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial V(t,y)}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t}\left(\sum_{i=1}^{I}\frac{c_{t_i}}{(1+y)^{t_i-t}}\right), \\
&= \frac{\partial}{\partial t}\left(\sum_{i=1}^{I}\frac{c_{t_i}}{\mathbf{e}^{(\mathbf{t_i}-\mathbf{t})\ln(\mathbf{1}+\mathbf{y})}}\right), \\
&= \sum_{i=1}^{I} c_{t_i}\ln(1+y)e^{-(t_i-t)\ln(1+y)}, \\
&= \ln(1+y)\underbrace{\left(\sum_{i=1}^{I}\frac{c_{t_i}}{(1+y)^{t_i-t}}\right)}_{V(t,y)}, \\
&= \ln(1+y)V(t,y).
\end{aligned}
$$

運用計算修正存續期間的方式，兩邊各除以債券價格，即可得 Carry：

$$
D_t = \frac{1}{V(t,y)}\frac{\partial V(t,y)}{\partial t} = \frac{\ln(1+y)\cancel{V(t,y)}}{\cancel{V(t,y)}} = \boxed{\ln(1+y)}
$$

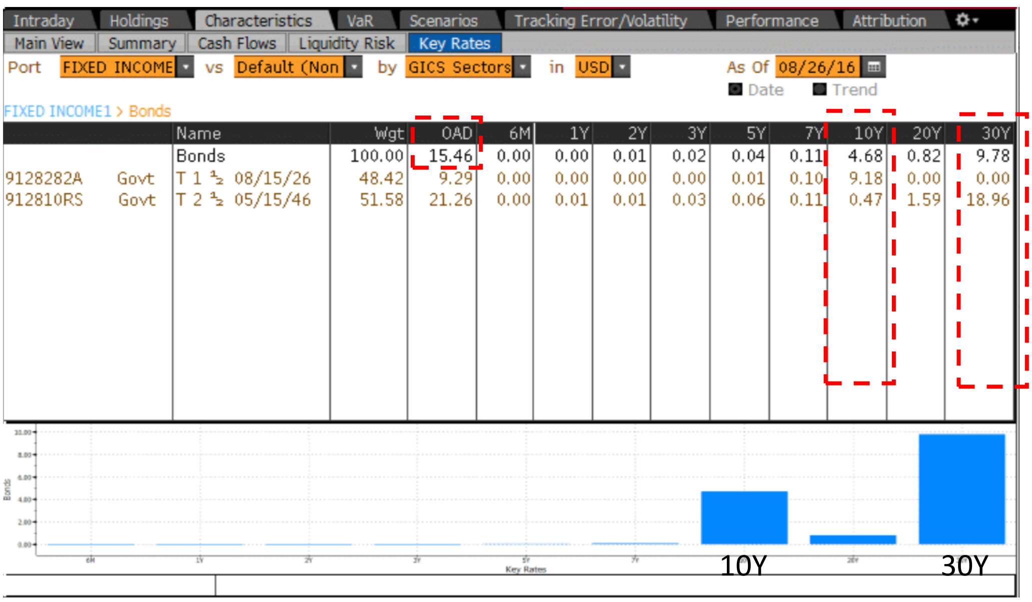
$$
\begin{aligned}
\underbrace{D_t}_{\approx y} &\approx \frac{1}{V(t,y)}\frac{\overbrace{V(t+\Delta t,y)-V(t,y)}^{\Delta V}}{\Delta t}, \\
y\Delta t &\approx \boxed{\frac{\Delta V}{V(t,y)}}.
\end{aligned}
$$

由上式可知，報酬率約等於殖利率及時間變動量之乘積，而時間變動帶來的風險即為殖利率。

三、關鍵利率存續期間(key rate duration)

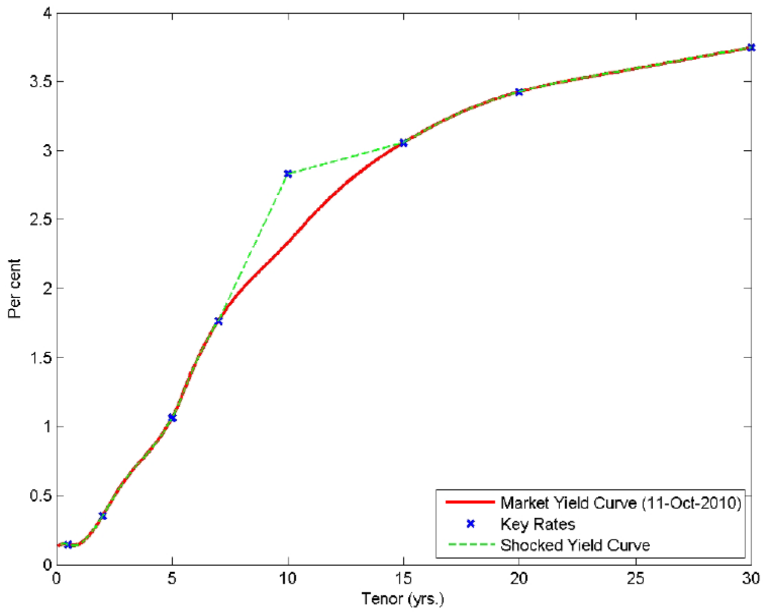
存續期間乃根據債券基本定價公式計算，隱含了市場各期間殖利率變動完全一致，惟現實生活中不同天期(tenors)殖利率的波動情況並非一致，如 2 年期殖利率有可能與 5 年期及 10 年期殖利率走勢不同，故講師 David Jamieson Bolder 表示，在考慮殖利率對固定收益證券報酬率之影響時，須進一步考慮關鍵利率(key rate)存續期間，以清楚分辨風險來源，特別是在規劃投資組合時，才能獲得完整資訊。例如，有一固定收益投資組合包含了 10 年期及 30 年期美國公債，整個投資組合之存續期間為 15.46，進一步觀察關鍵利率存續期間後(如下圖)，可發現該投資組合的主要曝險為 10 年期及 30 年期的公債殖利率變動。

圖二、關鍵利率存續期間



此外，講師表示儘管專業經理人可依照需求自訂關鍵利率的天期，市場流動性較高的債券天期，如 30 年期、10 年期、5 年期等係一般的合理選項。

圖三、關鍵利率變動



在此我們想要瞭解某關鍵利率變動對債券報酬之影響（如圖三），故將數學式中影響債券的殖利率化分為數個，並針對關鍵利率做偏微分，以推導出債券報酬對關鍵利率的敏感度：

$$\frac{\partial V(t, y_{t_1}, \ldots, y_{t_I})}{\partial y_k} = \frac{\partial}{\partial y_k}\left(\sum_{i=1}^{I} \frac{c_{t_i}}{(1+y_{t_i})^{t_i-t}}\right)$$

$$= \frac{-(t_k - t)\, c_{t_k}}{(1+y_{t_k})^{(t_k-t)+1}}$$

關鍵利率存續期間：

$$D_k = -\frac{1}{V(t, y_{t_1}, \dots, y_{t_I})} \frac{\partial V(t, y_{t_1}, \dots, y_{t_I})}{\partial y_k}$$

$$D_k \approx -\frac{1}{V(t, y_{t_1}, \dots, y_{t_I})} \frac{\overbrace{V(t, y_{t_1}, \dots, y_{t_k} + \Delta y_{t_k}, \dots, y_{t_I}) - V(t, y_{t_1}, \dots, y_{t_I})}^{\Delta V}}{\Delta y_{t_k}}$$

$$-D_k \Delta y_{t_k} \approx \boxed{\frac{\Delta V}{V(t, y_{t_1}, \dots, y_{t_I})}}$$

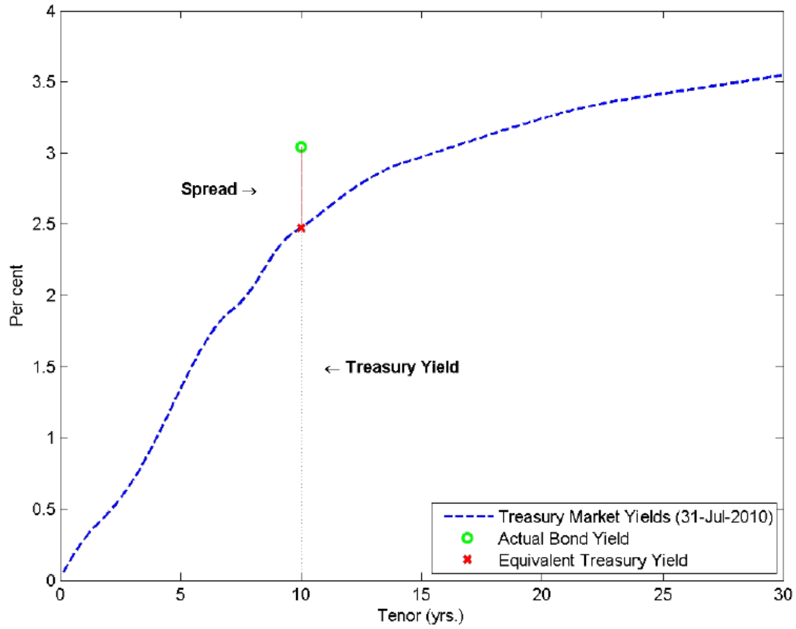
關鍵利率存續期間的定義：關鍵殖利率微小變動一單位對投資組合曝險(exposure)的影響。此外，假設將所有關鍵利率的變動皆納入考量，關鍵利率存續期間約等於修正存續期間。

$$\frac{1}{V}\sum_{k=1}^{I}\frac{\partial V(t, y_{t_1}, \dots, y_{t_I})}{\partial y_k} = \underbrace{\frac{1}{V}\sum_{k=1}^{n}\frac{-(t_k - t)\, c_{t_k}}{(1 + y_{t_k})^{(t_k - t)+1}}}_{\text{Sum of the key-rate durations}} \approx \underbrace{\frac{1}{V}\sum_{k=1}^{I}\frac{-(t_k - t)\, c_{t_k}}{(1 + y)^{(t_k - t)+1}}}_{\text{Modified duration}}$$

四、信用貼水存續期間(credit spread duration)

如圖四，若所投資債券具有高度信用風險，可將殖利率切割為美國公債殖利率及信用風險貼水兩部分。

圖四、信用風險貼水



將債券價格公式修改如下：

$$V(t,\hat{y},s)=\sum_{i=1}^{I}\frac{c_{t_i}}{(1+\underbrace{\hat{y}+s})^{t_i-t}}$$

$\hat{y}$ 為美國公債殖利率， S為信用貼水(spread)。

針對信用貼水做偏微分：

$$\begin{aligned}\frac{\partial V(t,\hat{y},s)}{\partial s} &= \frac{\partial}{\partial s}\left(\sum_{i=1}^{I}\frac{c_{t_i}}{(1+\hat{y}+s)^{t_i-t}}\right),\\ &= -\frac{1}{(1+\underbrace{\hat{y}+s}_{y})}\sum_{i=1}^{I}\frac{(t_i-t)\,c_{t_i}}{(1+\underbrace{\hat{y}+s}_{y})^{t_i-t}},\\ &= \underbrace{-\frac{1}{(1+y)}\sum_{i=1}^{I}\frac{(t_i-t)\,c_{t_i}}{(1+y)^{t_i-t}}}_{\frac{\partial V}{\partial y}}.\end{aligned}$$

將上式兩邊除以債券價格，即可得修正後的信用貼水存續期間（modified spread duration）：

$$D_S = -\frac{1}{V(t,\hat{y},s)}\frac{\partial V(t,\hat{y},s)}{\partial y} = +\frac{1}{V(1+y)}\sum_{i=1}^{I}\frac{(t_i-t)\,c_{t_i}}{(1+y)^{t_i-t}}$$

$$D_S \approx -\frac{1}{V(t,\hat{y},s)}\frac{\overbrace{V(t,\hat{y},s+\Delta s)-V(t,\hat{y},s)}^{\Delta V}}{\Delta s}$$

$$-D_s\Delta s \approx \boxed{\frac{\Delta V}{V(t,\hat{y},s)}}$$

即報酬率約等於修正後的信用貼水存續期間及信用貼水變動之乘積。

五、匯率風險

在投資外幣債券時須考慮匯率風險，其數學公式如下：

$$V(t,y,\mathbf{E_t}) = \mathbf{E_t}V(t,y)$$

將其進行偏微分後，可知匯率變動所帶來的曝險即為整個投資部位：

$$\frac{\partial V(t,y,\mathbf{E_t})}{\partial \mathbf{E_t}} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{E_t}}(\mathbf{E_t}V(t,y)) = V(t,y)$$

六、歸納影響固定收益投資組合的風險因素(risk factors)

如下表所示，影響債券報酬的主要四個風險即為殖利率、時間、信用風險及匯率，其中殖利率之曝險尚可細分為修正存續期間、凸性、關鍵利率等三類。

表一、固定收益投資組合的風險因素

Factor	Exposure	Definition
Yield	Modified Duration	$\frac{1}{V}\frac{\partial V}{\partial \mathbf{y}}$
	Convexity	$\frac{1}{V}\frac{\partial^2 V}{\partial \mathbf{y}^2}$
	kth Key-Rate Duration	$\frac{1}{V}\frac{\partial V}{\partial \mathbf{y}_{\mathbf{t}_\mathbf{k}}}$
Time	Carry	$\frac{1}{V}\frac{\partial V}{\partial \mathbf{t}}$
Credit Spread	Spread Duration	$\frac{1}{V}\frac{\partial V}{\partial \mathbf{s}}$
FX	FX Exposure	$\frac{\partial V}{\partial \mathbf{E_t}}$

參、債券投資之報酬因子

一、應用泰勒展開式(Talor series)對報酬因子進行推演

首先我們將報酬率之定義如下：

$$r(t_0,t_1) = \frac{V(t_1,y_1)-V(t_0,y_0)}{V(t_0,y_0)} = \frac{V_1-V_0}{V_0}$$

針對 1 階及 2 階項因子，應用泰勒展開式如下：

$$\begin{aligned} V_1 &= V_0 + V_t\Delta t + V_y\Delta y + \frac{1}{2}V_{tt}(\Delta t)^2 + \frac{1}{2}V_{yy}(\Delta y)^2 + V_{ty}\Delta t\Delta y \\ \frac{V_1-V_0}{V_0} &= \frac{V_t}{V_0}\Delta t + \frac{V_y}{V_0}\Delta y + \frac{1}{2}\frac{V_{tt}}{V_0}(\Delta t)^2 + \frac{1}{2}\frac{V_{yy}}{V_0}(\Delta y)^2 + \frac{V_{ty}}{V_0}\Delta t\Delta y. \end{aligned}$$

BIS 講師表示由於 2 階時間項及交叉項之數值相當小，故

在此予以消除簡化：

$$\begin{aligned} \frac{V_1-V_0}{V_0} &= \frac{V_t}{V_0}\Delta t + \frac{V_y}{V_0}\Delta y + \cancel{\frac{1}{2}\frac{V_{tt}}{V_0}(\Delta t)^2} + \frac{1}{2}\frac{V_{yy}}{V_0}(\Delta y)^2 + \cancel{\frac{V_{ty}}{V_0}\Delta t\Delta y}, \\ &= \frac{V_t}{V_0}\Delta t + \frac{V_y}{V_0}\Delta y + \frac{1}{2}\frac{V_{yy}}{V_0}(\Delta y)^2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{V_1-V_0}{V_0} &\approx \frac{1}{V_0}\frac{\partial V}{\partial t}\Delta t + \frac{1}{V_0}\frac{\partial V}{\partial y}\Delta y + \frac{1}{2}\frac{1}{V_0}\frac{\partial V}{\partial^2 y}(\Delta y)^2 \\ &\approx \boxed{r(t_0,t_1)}. \end{aligned}$$

稍做整理後我們可得到報酬率來源的基本式：

$$r(t_0,t_1) \approx \underbrace{\frac{1}{V_0}\frac{\partial V}{\partial t}}_{\approx\text{ Yield}}\Delta t + \underbrace{\frac{1}{V_0}\frac{\partial V}{\partial y}}_{\substack{\text{Modified}\\\text{Duration}}}\Delta y + \frac{1}{2}\underbrace{\frac{1}{V_0}\frac{\partial V}{\partial^2 y}}_{\text{Convexity}}(\Delta y)^2$$

由前幾節的推導，我們知道針對時間、殖利率進行 1 次偏微分及 2 次偏微分後，再除以債券價格即可得到 carry(y)、修正存續期間(D_M)及凸性係數(C)；以下將基本式簡化，並將信用風險貼水納入考量：

$$\begin{aligned} r &\approx y\Delta t - D_M \Delta y + \frac{1}{2} C (\Delta y)^2, \\ &\approx y\Delta t - D_M (\Delta y_{\text{TRE}} + \Delta s_{\text{OAS}}) + \frac{1}{2} C (\Delta y)^2 \\ &\approx y\Delta t - D_M \Delta y_{\text{TRE}} - \underbrace{D_S \Delta s_{\text{OAS}}}_{\substack{D_S \approx D_M \text{ is} \\ \text{spread duration}}} + \frac{1}{2} C (\Delta y)^2, \end{aligned}$$

由於關鍵利率存續期間(Ki)之和約等於修正存續期間(D_M)，我們將上式再度簡化表示：

$$r \approx \underbrace{y\Delta t}_{\text{Carry}} - \underbrace{\sum_{i=1}^{\nu} \kappa_i \Delta y_{\text{TRE}}}_{\substack{\text{Curve: recall} \\ D_M = \sum_{i=1}^{\nu} \kappa_i}} - \underbrace{D_S \Delta s_{\text{OAS}}}_{\text{Credit}} + \underbrace{\frac{1}{2} C (\Delta y)^2}_{\text{Convexity}},$$

由於匯率變動的曝險即為整個投資部位，加入匯率變動率後之報酬率公式如下：

$$r_{\text{Foreign}} \approx \underbrace{\frac{V_1 - V_0}{V_0}}_{r_{\text{Local}}} + \underbrace{\frac{E_1 - E_0}{E_0}}_{r_{\text{FX}}}$$

即

$$r \approx \overbrace{\underbrace{y\Delta t}_{\substack{\text{Carry}\\\text{return}}} - \underbrace{\sum_{i=1}^{\nu} \kappa_i \Delta y_{\text{TRE}}}_{\substack{\text{Curve}\\\text{return}}} - \underbrace{D_{\text{S}}\Delta s_{\text{OAS}}}_{\substack{\text{Credit}\\\text{return}}} + \underbrace{\frac{1}{2}C(\Delta y)^2}_{\substack{\text{Convexity}\\\text{return}}}}^{\text{Local currency return}} + \underbrace{\sum_{i=1}^{\alpha} \mathbb{I}_{FX_i}\left(\frac{E_{i,1}-E_{i,0}}{E_{i,0}}\right)}_{\text{FX return}}$$

$$\mathbb{I}_{FX_i} = \begin{cases} 0 : \text{Not exposed to currency } i \\ 1 : \text{Exposed to currency } i \end{cases}$$

由上式我們可知固定收益投資組合之報酬包含：時間報酬(carry return)、政府公債殖利率曲線變動報酬(curve return)、信用報酬(credit return)、凸性報酬(convexity return)、匯率變化(FX return)等

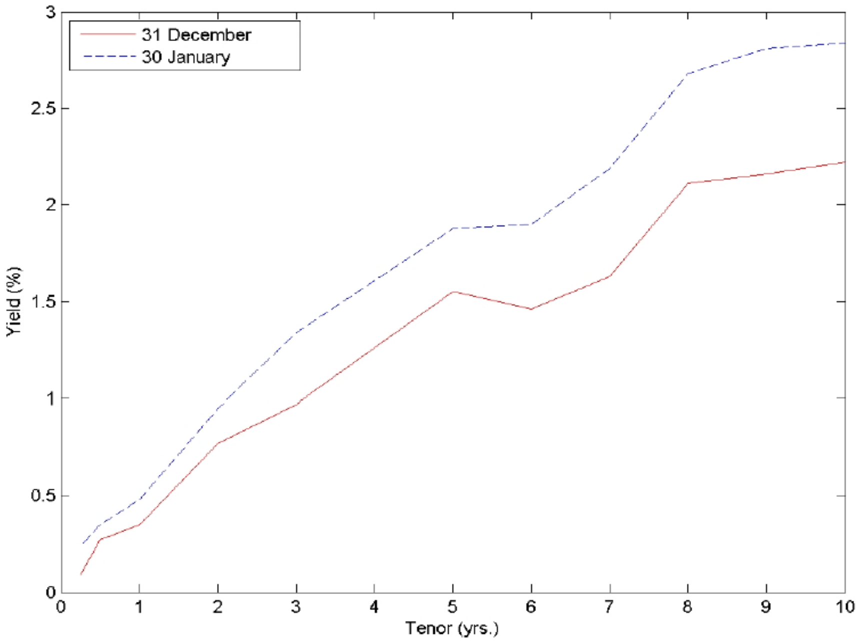
二、範例解析：損益來源探討

假設購買某票息 4.625%之 10 年期美國債券資訊如下：

表二、範例資訊

Characteristic	31 Dec	30 Jan	Change
Yield	2.61%	2.88%	0.27%
Dirty Price	$111.72	$110.48	-$1.24
OA Spread (bps.)	111.18	95.96	-15.23
Equivalent Treasury Yield	1.50%	1.92%	0.42%
Tenor (yrs.)	5.79	5.71	-0.08
Modified Duration	5.07	4.98	-0.09
Spread Duration	5.07	4.98	-0.09
Convexity	0.29	0.30	0.01
Number of Days		30	

圖五、範例：1 月份美國公債殖利率曲線變化



該債券之總報酬為：

$$r=\frac{V_1-V_0}{V_0}=\frac{110.48-111.72}{111.72}=-110.99$$

為了瞭解為何虧損，故我們針對前一節報酬式中的報酬因子加以分析。

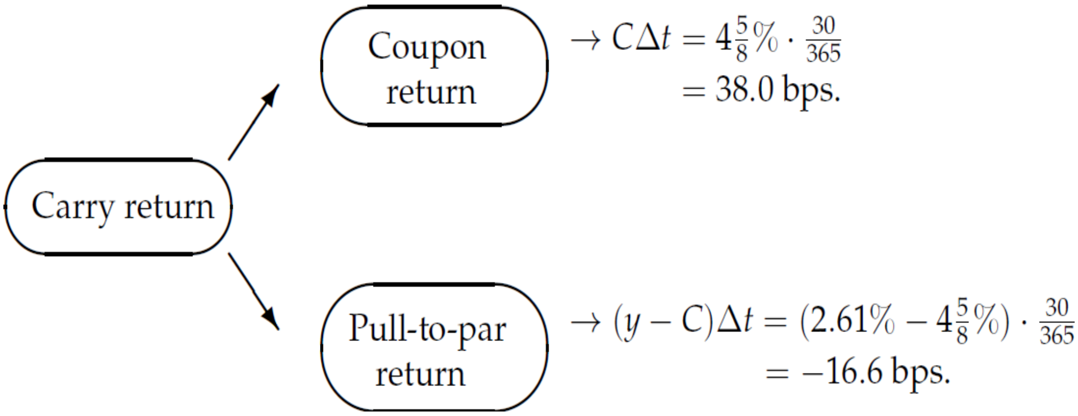
$$r=\underbrace{y\Delta t}_{\text{Carry return}}-\underbrace{D_{\mathrm{M}}\Delta y_{\mathrm{TRE}}}_{\text{Curve return}}-\underbrace{D_{\mathrm{S}}\Delta s_{\mathrm{OAS}}}_{\text{Credit return}}+\underbrace{\frac{1}{2}C(\Delta y)^2}_{\text{Convexity return}}$$

（一） 時間報酬因子(carry return)

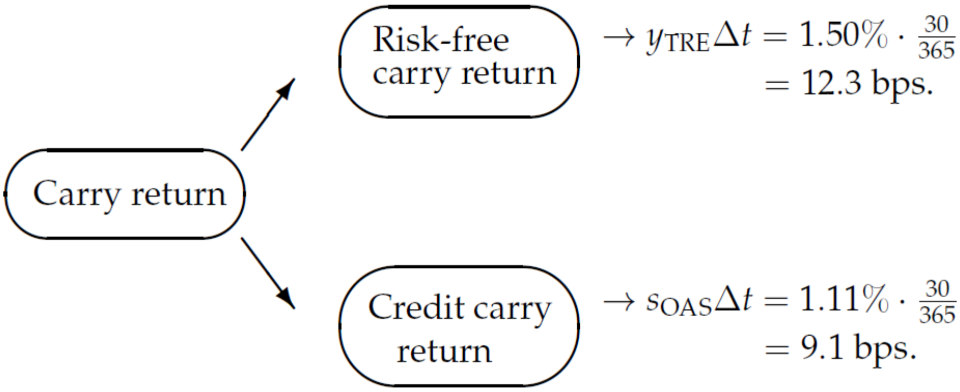
$$\text{Carry return}=y\Delta t=2.61\%\cdot\frac{30}{365}=21.5\text{ bps}$$

1. 債券票面利息為 4.625%，可將時間報酬進一步拆解為票息(coupon)與貼近面額損益(pull-to-par return)[1]。

[1] 貼近面額報酬：一般債券都會有折、溢價發行的情況，而隨著到期日越來越接近，債券價格將會逐漸貼近面額(pull to par)；其他條件不變下，隨著時間變動，將此價格前後差距之影響轉換為報酬形式，即為 pull-to-par return。



2. 將倒債風險納入考量，則可將時間報酬進一步拆解為無風險時間報酬(risk free carry return)與風險性時間報酬(credit carry return)。



（二） 公債殖利率曲線報酬(curve return)因子

由於本範例為美國債券，故觀察美國公債殖利率曲線變化，根據此前的推導公式，計算對總報酬的影響：

$$\text{Curve return} = -\underbrace{\text{Modified Duration}}_{-D_M} \cdot \underbrace{\text{Change in Equivalent UST Yield}}_{\Delta y_{\text{TRE}}}$$

$= \ -5.07\% \cdot 0.42\% = -212.9\text{bps}$

由數字-212.9bps 可知殖利率曲線變化對總損益具有相當大的影響。

（三） 信用報酬(credit return)因子

根據信用貼水存續期間之定義，可計算出信用報酬如下：

$$\begin{aligned}\text{Credit return} &= -\underbrace{\text{Spread Duration}}_{-D_S} \cdot \underbrace{\text{Change in OA Spread}}_{\Delta s_{OAS}} \\ &= -5.07 \cdot -0.15\% = 76.1 \text{ bps.}\end{aligned}$$

（四） 凸性報酬(convexity return)因子

根據凸性報酬公式計算凸性報酬如下：

$$\text{Convexity return} = \frac{1}{2}C(\Delta y)^2 = \frac{1}{2}\cdot 0.29\cdot(0.27)^2$$

$$= 1.05\text{bps}$$

三、拆解殖利率曲線之變動來源

BIS 講師表示，殖利率曲線變化對報酬有很大的影響，而解釋殖利率曲線的研究方法有很多種，在此則介紹較常用三種分析方式：

（一）模型分析法(Using a Model)

在此講師使用 The Nelson Siegel Model 去模擬殖利率曲線，公式如下：

$$y(t,T) = x_{0,t} \cdot 1 + x_{1,t}\left(\frac{1-e^{-\lambda(T-t)}}{\lambda(T-t)}\right) + x_{2,t}\left(\frac{1-e^{-\lambda(T-t)}}{\lambda(T-t)} - e^{-\lambda(T-t)}\right)$$

$$= x_{0,t} f_0(t,T) + x_{1,t} f_1(t,T) + x_{2,t} f_2(t,T)$$

其中，λ 為常數，$x_{0,t}, x_{1,t}, x_{2,t}$ 等為時間變動參數；而 $f_0(t,T), f_1(t,T), f_2(t,T)$ 等分別代表截距項、斜率、曲度。

為解釋殖利率曲線在 t_1 至 t_2 之間的變動，我們將公式修改如下：

$$y(t_2,T) - y(t_1,T) = x_{0,t_2} f_0(t_2,T) + x_{1,t_2} f_1(t_2,T) + x_{2,t_2} f_2(t_2,T)$$
$$- x_{0,t_1} f_0(t_1,T) + x_{1,t_1} f_1(t_1,T) + x_{2,t_1} f_2(t_1,T)$$

為了簡化分析，我們假設 $f_0(t,T), f_1(t,T), f_2(t,T)$ 在此短期間內為固定常數，故可將上式進一步表示如下：

$$\Delta y \approx f_0(t_1,T)(x_{0,t_2} - x_{0,t_1}) + f_1(t_1,T)(x_{1,t_2} - x_{1,t_1})$$

$$+ f_2(t_1,T)(x_{2,t_2} - x_{2,t_1}) \approx \sum \overbrace{f_i(t_1,T) \bullet \Delta x_i}^{\Delta y_i}$$

$$\approx \sum Exposure\ to\ Yield\ \ Factor_i \times Change\ in\ Yield\ \ Factor_i$$

講師將此模型應用於上一節之分析範例，可得到殖利率變動拆解如下表：

表三、拆解模型因子對殖利率之影響

Factor	Factor loading	Risk factors			Yield Change
		x_{t_1}	x_{t_2}	x_{t_i}	$f_i \Delta x_i$
Level	1.0	0.040	0.051	0.010	104.0
Slope	0.4	-0.039	-0.048	-0.009	-35.6
Curvature	0.3	0.040	0.051	-0.007	-21.2
Total	n/a	n/a	n/a	n/a	46.2

可將公債殖利率曲線變動報酬之公式改寫如下：

$$\begin{aligned} \text{Curve return} &= -D_M \Delta y_{\text{TRE}}, \\ &= -D_M \underbrace{\left(\sum_{k=1}^{m} \begin{matrix}\text{Exposure to} \\ \text{Model Factor}_k\end{matrix} \cdot \begin{matrix}\Delta\text{ in} \\ \text{Model Factor}_k\end{matrix} \right)}_{\begin{matrix}\text{Model predicted} \\ \Delta y_{\text{TRE}}:\ \text{yield changes}\end{matrix}} \end{aligned}$$

依照上式，將 The Nelson Siegel 模型中各因子對 Curve return 之貢獻計算如下：

截距項(level)= -5.07 ‧104bps =-527.28bps

斜率(slope)=-5.07‧(-35.6bps)=180.49bps

曲度(curvature)=-5.07‧(-21.2bps)=107.48bps

由計算結果可知，這段期間殖利率曲線變動影響 Curve return 損失的最大原因來自截距項(level)之變動。

（二） 關鍵利率存續期間分析法(Using key rate Duration)

講師將政府公債殖利率曲線報酬公式予以轉化如下：

$$Curvereturn = -Modified\ \ Duration \bullet Change\ in\ ET\ Yield$$

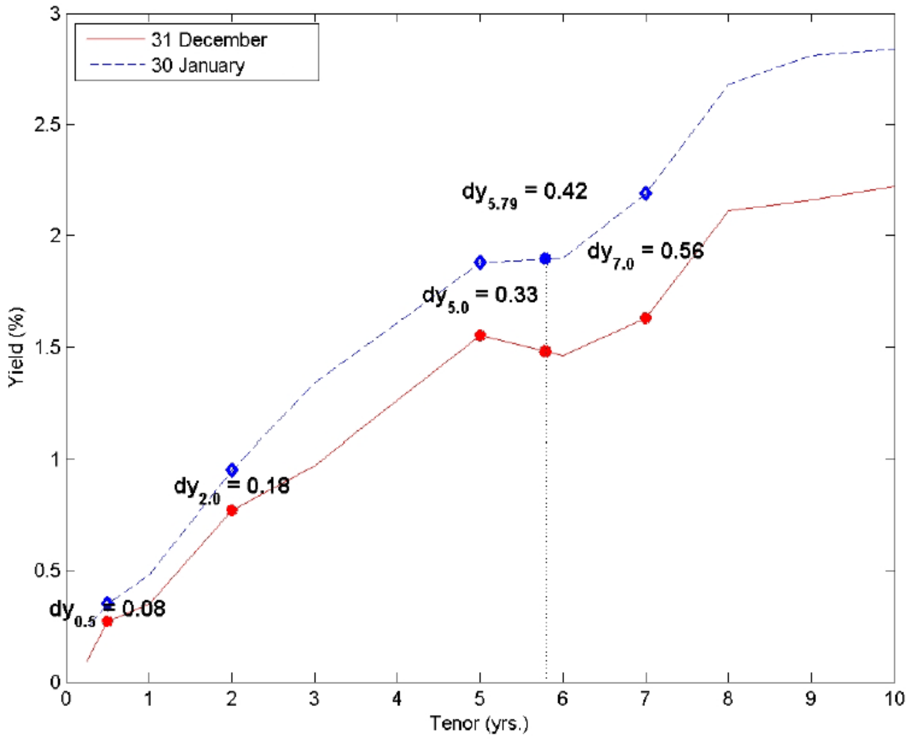
$$= -\sum Key\ rate\ duration_i \bullet Change\ in\ ET\ Yield$$

$$= -\sum_{i=1}^{n} k_i \bullet \Delta\, y_{TRE}$$

其中 K_i 為 Key rate duration，Δy^{TRE} 代表殖利率變動。

觀察 6 個月、2 年、5 年、7 年期之關鍵利率變化如下圖：

圖六、關鍵殖利率之變化



由圖六可看出 6 個月之利率變動為+8bps、2 年期變動為+18bps、5 年期變動為+33bps、7 年期變動為+56bps；計算不同天期 key-rate 變動對 curve return 的貢獻度如下表：

表四、拆解關鍵利率之影響[2]

Tenor	k_i	Δy_i^{TRE}	Δy^{TRE}	$-k_i \Delta y_i^{TRE}$	$-k_i \Delta y^{TRE}$
		(%)		(bps)	
6M	0.02	0.08	0.42	-0.16	-0.84
2Y	0.14	0.18	0.42	-2.52	-5.88
5Y	4.16	0.33	0.42	-137.28	-174.72
7Y	0.75	0.56	0.42	-42	-31.5
Total	5.07			-181.96	-212.94

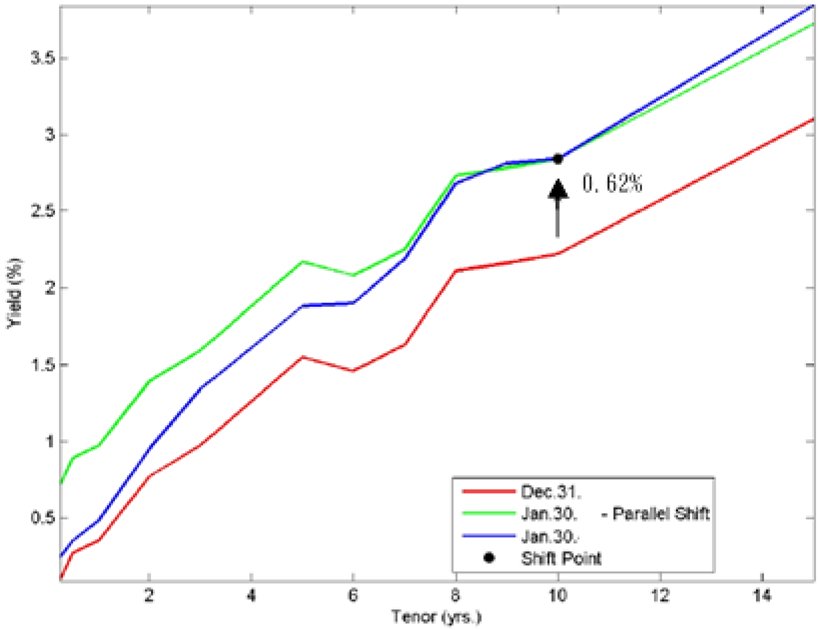
由上表之計算結果可知，5 年期關鍵利率的變化對 Curve Return 的影響為最大。

(三) 特殊定義分析法(Using an Ad Hoc Definition)

BIS 講師表示，除了運用模型或關鍵利率存續期間外，投資人亦可運用自行定義的方式來拆解殖利率曲線變動報酬；在此講師介紹平移分析法，即將殖利率曲線的變動原因分類為平行移動及其他，如下圖所示：

[2] 由 Bloomberg 功能中的” XLTP XKRD”，輸入債券代碼可快速得到各年期關鍵利率存續期間。

圖七、殖利率曲線平移分析



以 10 年期公債殖利率在此月份中的增減做為平移標準，計算該平移對殖利率曲線報酬的貢獻，且將其餘因子歸類為其他影響。

表五、拆解殖利率曲線平移之影響

	Calculation(%)	Curve return (bps)
Parallel Shift	- 5.07 x 0.62	-314.34
Other	- 5.07 x (0.42-0.62)	101.4
Total	- 5.07 x 0.42	-212.94

在範例中 10 年期公債殖利率提高了 0.62%，故將其帶入殖利率曲線報酬的公式中，如上表五所示，即可計算出平移貢獻度，而與實際報酬間的差，即為其他影響因子，

最後結果顯示整體公債殖利率曲線的向上平移造成部位很大的虧損。

肆、固定收益投資組合之損益分析

一、損益來源公式的進一步延伸

上一章介紹拆解債券損益來源的方式，在此將其進一步延伸至整個固定收益投資組合，首先我們先對投資組合內各商品之權重定義如下：

$$\omega_i(t) = V_i(t) \Big/ \sum_{k=1}^{n} V_k(t)$$

其中，$V_i(t)$ 代表 i 證券在時點 t 時的市場價值。參考上一章之報酬因子公式，依照各固定收益證券之權重加總後，即可得到固定收益投資組合之損益分析公式：

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{n} \omega_i(t) r_i}_{r_p} = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \omega_i(t) y_i \Delta t}_{\text{Carry}} - \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \omega_i(t) \sum_{j=1}^{v} \kappa_j \Delta y_{\text{TRE},i}}_{\text{Curve}} - \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \omega_i(t) D_{i,\text{S}} \Delta s_{\text{OAS},i}}_{\text{Credit}} + \underbrace{\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \omega_i(t) C_i (\Delta y)^2}_{\text{Convexity}} + \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \omega_i(t) \left(\sum_{k=1}^{\alpha} \mathbb{I}_{FX_{k,i}} \left(\frac{E_{k,t+1} - E_{k,t}}{E_{i,t}} \right) \right)}_{\text{FX}}.$$

二、實例講解：固定收益投資組合之損益分析

BIS 講師指出，瞭解其分析模式的最佳方法係透過實例講解。以下為 2009 年 1 月底時某投資組合及 J.P. Morgan EMU Benchmark 之相關資訊：

表六、投資組合及 Benchmark 資訊

Characteristic	Benchmark	Portfolio
Number of Securities	259	12
Tenor (years)	8.4	8.5
Coupon	4.5%	4.5%
Yield	3.3%	3.1%
Equivalent Treasury Yield	2.6%	2.6%
Credit Spread (bps.)	70.6	56.2
Modified Duration	6.2	6.2
Spread Duration	6.2	6.2

由上表，講師使用 12 支債券去模擬 J.P. Morgan EMU Benchmark 指數，獲得天期及殖利率相近之投資組合。依前一小節公式及各證券之價格資訊可得到投資組合報酬(r_p)、Benchmark 報酬(r_b)及兩者之差距(r_a)，其中第一列 approximate return 指的是根據公式所換算出之預估報酬率，相較實際報酬僅 1bps 之差異。

表七、投資組合及 Benchmark 之報酬率差異

Element	r_p	r_b	r_a
Total Return (approximate)	40.1	84.5	-44.4
Residual	1.0	0.0	1.0
Total Return (actual)	41.1	84.5	-43.4

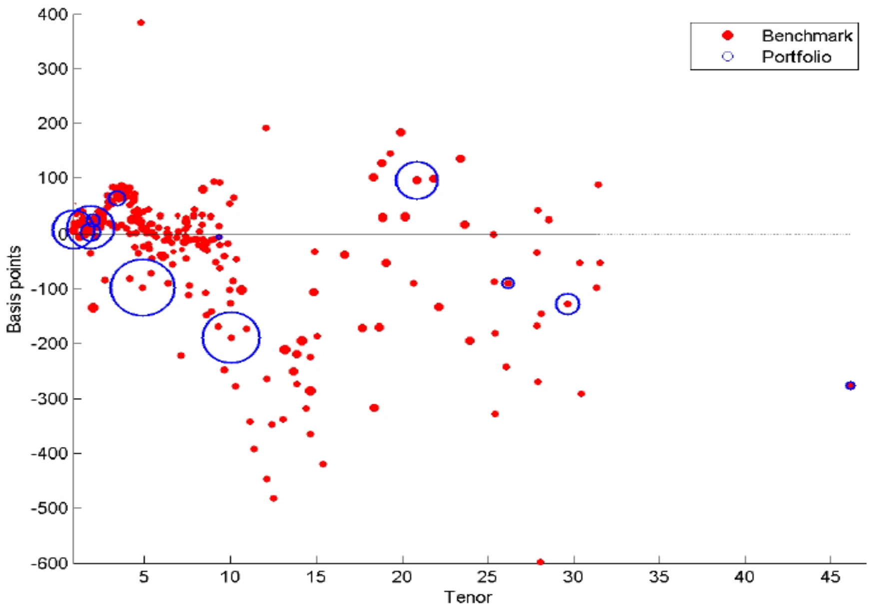
由表七可知，講師所設定之投資組合正處於獲利狀態，惟表現劣於 Benchmark，顯示投資組合有改善空間；依據前幾章節之公式，我們可計算損益影響因子如下表：

表八、損益來源分析

Return Type	r_p	r_b	r_a
Risk-free Carry	19.6	19.8	-0.1
Spread Carry	4.3	5.4	-1.1
Total Carry Return	24.0	25.2	-1.3
6M	0.8	0.8	-0.1
2Y	6.8	5.6	-1.3
5Y	21.8	22.2	-0.4
10Y	38.3	33.9	4.3
20Y	-2.0	6.2	-8.2
30Y	9.6	9.7	-0.1
Curve Return	75.2	78.3	-3.2
Spread Return	-59.7	-19.7	-40.0
Convexity Return	0.7	0.8	-0.1
Residual	1.0	0.0	1.0
Total Return (actual)	41.1	84.5	-43.4

其中，影響投資組合與 Benchmark 最大者為信用報酬因子；以下將投資組合及 Benchmark 之信用報酬以圖形表示(圖八)：

圖八、信用報酬分佈圖(空心圓圈代表投資組合債券)



圖八中較大之圓圈代表投資金額較大，我們可發現投資組合中 10 年期左右之債券信用報酬因子負值較大，表示該期限債券面臨較大信用風險損失。

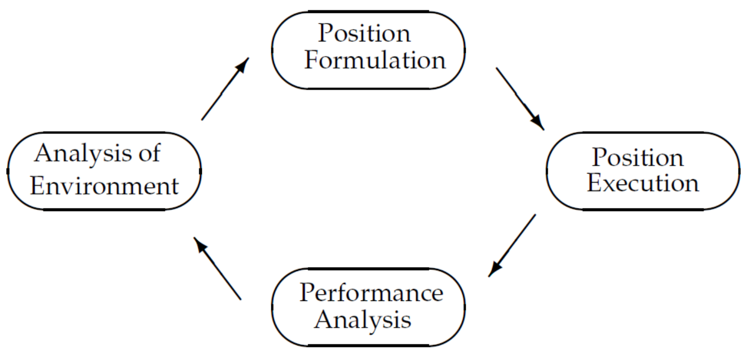
表九、投資組合內各國債券之信用報酬

Return Type	r_p	r_b	r_a
Austria	-68.5	-6.1	-62.4
Belgium	0.0	-1.3	1.3
Germany	13.0	7.8	5.2
Spain	0.0	4.8	-4.8
Finland	0.3	0.3	0.0
France	-5.9	-4.3	-1.6
Greece	0.0	-1.4	1.4
Ireland	0.0	-2.3	2.3
Italy	0.0	-14.6	14.6
Netherlands	1.4	-0.7	2.1
Portugal	0.0	-2.0	2.0
Other Countries	0.0	0.0	0.0
Total Spread Return	-59.7	-19.7	-40.0

由表九，我們可發現相較於 Benchmark，投資組合擁有相對較大金額之 Austria 債券，導致信用風險損失較高，故可考慮減少該國家投資，改而增加德國債券之持有比重，惟亦需注意對其他損益因子造成太大影響。

伍、結語

有別於綜合考量外部環境、可運用資源、投資人風險偏好及需求等因素後進行未來趨勢預測，以達最適化投資組合的策略性規劃(strategic planning)，BIS 講師指出，本次研討會內容更著重於改善投資流程(investment process)且相對重視細節的戰略性規劃(tactical planning)；該行係依下列步驟進行投資：分析環境→規劃部位→執行部位→分析成效，而此步驟係一循環性的決策及改善過程，如以下示意圖：



其中，無論經理人的決策為被動地複製 benchmark 或更積極地建構打敗 benchmark 的組合，最重要的能力係要

瞭解 benchmark 及投資組合本身的特性(characteristic)差異，此即講師一再強調的清楚瞭解部位情況(no black box)。

此次研討會介紹之分析方法係由最基礎的數學推導出發，讓學員充分認識固定收益投資組合之曝險因子及報酬組成因子，將影響投資組合之來源做系統性的拆解；運用該法即可幫助經理人觀察投資組合的每日表現，即時清楚瞭解部位狀況，而在比較 benchmark 及前期之投資組合表現後，即可決定未來投資組合之走向；整體而言，此次研討會內容豐富，為認識固定收益投資組合分析的優良課程，甚具學習價值。

陸、參考資料

1. David Jamieson Bolder(2015), Fixed-Income Portfolio Analytics, Bank for International Settlements, Sprinter.
2. Fabozzi F.(2005), The Handbook of Fixed Income Securities, McGraw-Hill.
3. A.Meucci(2007), Strategic Asset Allocation, Sprinter.
4. David Zeballos(2011), Market Risk Measurement:Key Rate Duration as an asset allocation instrument, Central Bank of Bolivia.
5. Carl Bacon(2003), Practical Portfolio Performance Measurement and Attribution, Wiley.