

國立交通大學  
National Chiao Tung University

出國報告（出國類別：出國短期研究）

## 碼率相容擷取式低密度查核碼的漸進 式構造法與混合解碼排程

服務機關：電機工程學系電信工程研究所

姓名職稱：翁健家 博士生

前往國家：瑞士 洛桑

出國期間：101/07/12~101/12/31

報告日期：102/02/26

## 一、摘要

於短期拜訪研究期間，學生主要探討碼率擷取式低密度查核碼 (Rate-Compatible Punctured Low-Density Parity-Check Codes) 的建構方式，學生採用的方法基於原型圖 (Proto-Graph)。截至目前為止之研究成果，我們首先拓展了傳統文獻上對於原型圖構造的基礎矩陣只能具備整數基本限制，引入有理數的概念；同時，我們也提出一類分解基礎矩陣的做法，此方式在構造碼率相容的查核矩陣有相當程度的重要性。最後，我們設計一演算法來拓展原有之基礎矩陣，經由此拓展，所得之新基礎矩陣不僅適合於碼率相容擷取時使用，該新基礎矩陣也具有一些可被證明的優異特性。

## 二、目次

一、摘要.....	2
二、目次.....	3
三、本文.....	4
(一) 目的.....	4
(二) 過程.....	5
(三) 心得及建議.....	8

### 三、本文

#### (一) 目的

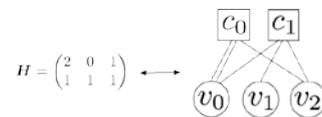
碼率相容擷取式錯誤更正碼 (Rate-Compatible Punctured Error Correction Codes) 是一類能根據通訊環境的優劣而隨時調整傳送碼率的錯誤更正碼，其優點包含：可提供範圍廣泛的工作碼率、傳送端僅需使用單一編碼器作編碼傳送，且接收端能透過單一解碼器解碼，以及可大幅度改善通道的頻寬使用效率。然而，在許多的研究案例中卻發現，此類編碼系統的解碼錯誤率表現經常會隨著頻寬效率的改變而敏感變化。因此，要如何讓具可大幅變動碼率的單一編解碼器系統之錯誤率效能維持一定品質，在錯誤更正碼的應用領域中一直是個非常重要的研究課題。

低密度查核碼 (Low-Density Parity-Check Codes, LDPC Codes) 是近年來錯誤更正碼相關研究的熱門重心，主因為此類錯誤更正碼可在合理的運算複雜度下，提供接近理論極限的錯誤率效能。而本研究內容即是以探討碼率相容擷取式低密度查核區塊碼 (Rate-Compatible Punctured LDPC Block Codes, RCP-LDPC-BC) 的構造方式為主。在文獻中，針對碼率相容擷取式低密度查核區塊碼的構造研究上可區分為兩類。第一類為針對碼集 (Code Ensemble)，利用節點分布 (Degree Distribution) 搭配密度演進法則 (Density Evolution, DE) 分析的構造方式，探討在各類節點中隨機擷取多少比例後，仍能使解碼錯誤率維持在不錯的解碼臨界值 (Decoding Threshold)。而後，查核矩陣則依該節點分布構造，擷取節點的位置也按擷取比例隨機挑選而得；而第二類則針對一給定的低密度查核區塊碼之查核矩陣，探討如何選擇被擷取的位元位置，使得其解碼錯誤率能盡可能的維持在特定品質之上。但由於上述兩種方式考慮的對象以及思維略有差異，過去的研究工作並未能有同時充分擷取兩者優點的構造方法。有鑑於此，本研究的目標乃希望能在查核矩陣的建造過程中，一併決定適合擷取的位置。並且，我們也以設計短、中碼長該類適合用於無線通訊系統的錯誤更正碼為主軸。

## (二) 過程

與指導教授評估和討論原先的研究提案後，我們決定先針對如何按照提案中的思維，從給定的最高碼率查核矩陣，透過加入查核方程與編碼位元使得碼率降低，達成一系列碼率彼此相容的查核矩陣作探討。在此部分，一類基於原型圖 (Proto-Graph) 的構造方法被應用於查核矩陣的漸進建造上。

原型圖是一種特殊的查核矩陣產生方法，其可由基礎矩陣 (Base Matrix) 所描述。例如下圖左方為一具有三種類型變數節點與兩種類型查核節點的基礎矩陣，右方為其所對應的田納圖表示法 (Tanner Graph Representation)：



利用該原型圖以及擴充維度  $Q$ ，我們可將基礎矩陣中的每個元素用一  $Q \times Q$  且權重為該元素之值的循環方陣取代 (或稱之為拓展)。例如  $Q = 3$ ，

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 110 & 000 & 001 \\ 011 & 000 & 100 \\ 101 & 000 & 010 \\ 001 & 010 & 100 \\ 100 & 001 & 010 \\ 010 & 100 & 001 \end{bmatrix}$$

來構造出一個維度為  $6 \times 9$  的查核矩陣。此方式的特點除了可快速產生對應維度的查核矩陣外，由於基礎矩陣的特性和拓展後形成的查核矩陣特性一致，譬如基礎矩陣的第一類查核節點會檢查第一類和第三類編碼位元，而該特性在拓展後的查核矩陣前三個查核方程式也可看到相同的檢查，因此，利用標準密度演進法則分析基礎矩陣之結果和分析其所擴展的查核矩陣結果並無相異。另一方面，由於查核矩陣均由循環方陣拓展的關係，對應此查核矩陣的低密度查核碼會形成一擬循環 (Quasi-Cyclic) 碼，此特性在硬體的實現上具有相當程度的好處。

研究過程的第一階段，我們先將原本的原型圖概念一般化 (Generalization)。在原始的原型圖基礎矩陣描述裡，一個整數元素是表示該元素在拓展成循環矩陣時的矩陣行權重及列權重，因此該元素要求必為整數。然而，我們可擴充此定義使該元素為一

有理數，而此有理數的唯一限制是其分母需為拓展維度  $Q$  之因數，其意涵為：當該元素拓展為  $Q \times Q$  的矩陣時，該矩陣的行平均權重及列平均權重。例如下列左方矩陣對應元素為  $1/3$ ， $Q = 3$ ；右方矩陣對應元素為  $3/2$ ， $Q = 4$ ，

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

而元素對應之矩陣的形式並不唯一，譬如  $3/4$ ， $Q = 4$  的矩陣對應形式就有下列兩種方式以及它們的置換 (Permutation)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

並且，一般化後的原型圖不再保證滿足擬循環之特性。

研究過程的第二階段，我們提出一種利用有理數的拆解，分解該元素對應矩陣的方法，這個分解方法是產生一系列碼率相容查核矩陣的基礎。給定一有理數  $p/q$  ( $q \neq 0$ )，此有理數可被分解為兩個有理數之和： $\frac{p}{q} = \frac{a}{q} + \frac{b}{q}$

其中  $a + b = p$ ,  $a \geq 0, b \geq 0$ 。透過這個分解，原先對應  $p/q$  的矩陣也可以被對應分解，例如： $\frac{3}{4} = \frac{1}{4} + \frac{2}{4}$

則原先對應元素  $3/4$  的矩陣可被分解為：

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

透過簡單的證明，有理數分解對應於矩陣分解的存在性可被保證。

研究過程的第三階段，在給定拓展維度  $Q$  以及一個維度  $b \times c$  的基礎矩陣下，我們提供一演算法來加入查核方程與變數節點，用以將此基礎矩陣擴充 (Extension)，並產生一具有特殊擷取特性的查核矩陣。

假設基礎矩陣為

$$\mathbf{H}_b = \begin{pmatrix} h_{0,0} & h_{0,1} & \cdots & h_{0,c-1} \\ h_{1,0} & h_{1,1} & \cdots & h_{1,c-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ h_{b-1,0} & h_{b-1,1} & \cdots & h_{b-1,c-1} \end{pmatrix}$$

其中  $h_{i,j}$  為有理數，其分母限制為拓展維數  $Q$  之因數。則一  $L$  階擴充之演算法描述如下：

Step 1. 令  $\mathbf{H}_b^* = \mathbf{H}_b$  ;  $b^* = b$  ;  $c^* = c$  ; 且  $h_{i,j}^*$  表示  $\mathbf{H}_b^*$  中第  $i$  列，第  $j$  行之元素。從  $\mathbf{H}_b^*$  挑選任一非零元素  $h_{x,y}^*$ ，並將其分解為兩有理數  $s$  及  $t$  之和，其中  $s$  及  $t$  之分母要求為拓展維數  $Q$  之因數。

Step 2. 設定：

$$\boldsymbol{\alpha} = \left( \underbrace{0, \dots, 0}_{x-1}, 1, \underbrace{0, \dots, 0}_{c^*-x} \right)^T,$$

$$\boldsymbol{\beta} = \left( \underbrace{0, \dots, 0}_{y-1}, t, \underbrace{0, \dots, 0}_{b^*-y}, 1 \right),$$

$$\mathbf{H}_b^* = \begin{pmatrix} & \mathbf{H}_b^* & \boldsymbol{\alpha} & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & \boldsymbol{\beta} & & \end{pmatrix}.$$

令新形成矩陣  $\mathbf{H}_b^*$  之元素  $h_{x,y}^* = s$ ，並且重新定義  $b^*$  及  $c^*$  表示該新形成矩陣的列數及行數。

Step 3. 將已擴展階數計數器加一，並且檢查其數值是否超過  $L$ 。若超過，則擴充完成，停止演算法動作。若未超過，則回到 Step 1 繼續執行擴充。

利用上述演算法取得  $L$  階擴充後的基礎矩陣後，我們利用下述方法將其拓展成一標準查核矩陣。首先，選定參數  $P$  為拓展維數  $Q$  之整數倍數，按照  $L$  階擴充後的基礎矩陣內之元素值，生成該元素對應之  $P \times P$  矩陣取代之，而相同元素值之對

應矩陣可相異。最終，當把基礎矩陣的所有元素均取代後，我們可獲得一  $P(b + L) \times P(c + L)$  之適合用於擷取的查核矩陣。

### （三）心得及建議

洛桑聯邦理工學院是瑞士兩所聯邦理工學院之一，在世界大學排行中具有相當優秀的整體排名，學術以電資類見長，目前也大量投注資金在生物相關領域與工程領域。學生所參訪之實驗室即屬於 Computer and Communication Sciences 下，由通訊錯誤更正碼領域專家 Prof. Rudiger 所率領的 Communication Theory Laboratory (LTHC)。該實驗室在先進編碼領域中具有相當程度的影響力，發表成果也多是經典著作。以下，學生就短期拜訪截至目前為止所見所聞分享心得與建議。

學生所屬之實驗室與其他兩個也是通訊理論研究實驗室，除了各自的編制外，也合組為一聯合實驗室，其中所有資源一併共享，例如有聯合實驗室所屬小型圖書館與電腦計算設備。所有校方對實驗室的行政作業與電腦設備維護有專職助理協助處理。老師和學生不需被繁複的行政程序或核銷所困擾，只需專心研究即可。聯合實驗室之所有成員彼此會有強烈的學術交流，包括教授間也緊密保持互動。基本上這種方式是將各實驗室之優勢結合成一股更強大的研究力量，並且透過想法的共享以創造更優異的研究成果；更重要的，聯合實驗室的成員以聯合實驗室的發表成果為榮，並不強調個人主義或單一實驗室之成就。而每一年，聯合實驗室會要求每一成員報告過去一年之研究進度，並邀請該領域研究學者前來評論，此舉不僅可適時修正學生錯誤或不合理的研究方向，甚至可協助學生突破於研究上遭遇之困難。

另一方面，系所下所有實驗室的教授每年會有固定排定之流程，教授其研究領域的基礎理論與說明研究方向，與會人員除了有碩博士學生外，也會有很多教授前往參與聆聽。報告結束的提問，老師間會有相當良性的討論，學生也透過這個分享來瞭解不同領域的學科所使用的基本知識或技巧。這個過程對教授們來說，他們能透過演講過程中分享的未來展望，或是目前的研究瓶頸，獲得一些來自同儕間的想法協助甚至修正。而對學生來說，除了瞭解不同學科的知識外，也會對整體科學研究發展的視野建立宏觀的脈絡。除此之外，系所每週也會固定邀請不同領域的國際頂尖專家學者前來演講，除了能有機會第一線獲得他們研究的基礎思想與邏輯外，也可增加系所內部進行前瞻性研究，甚至與這些國際著名實驗室共同合作的可能性。並且，透過熟識頂尖專家的老師之引薦，適當的對談也有利於增加相關研究領域實驗室，甚至其研究內容於國際上的曝光度。以長遠發展的角度來說，這種方式有利於建立系所的學術人

脈，更可協助系所實驗室與國際頂尖實驗室的相互交流。

由上描述之心得，也實際體會這些做法的優點後，學生對於這些觀察提出四點建議。這四點建議有些已在系所內實施，但學生認為我們應再積極些，甚至老師與博士生的心態必須有所調整，營造系所成就的榮譽感，並由系所的角度營造共贏的氛圍將系所內的研究成果或學術地位推向世界頂端。

- 定期由老師輪流公開專題演講實驗室基礎研究知識，透過不同領域的互相交流，除了能加強各類研究學者的互動外，學生也可獲得更多研究走向的建議。
- 針對博士生實施年度進度報告，並正式邀請該領域專家參與，以及時修正博士研究主題走向之合理性與加強研究內容之正確性。
- 多邀請目前熱門主題研究卓越者進行專題演講，增加學校發展前瞻研究之可能性。
- 增加實驗室級別交流的機會，彌補學校與國際知名大學互動之侷限與困境，可多提供老師或學生直接參與國際頂尖實驗室短期或長期研究的補助申請機會。此舉不僅能拓展台灣學術能見度，建立台灣學術人脈，更可能於未來促成學校層級的互惠合作。