



國立交通大學

*National Chiao Tung University*

出國報告（出國類別：學術研究之交流訪問）

赴澳大利亞 University of  
Wollongong 訪問研究

服務機關：應用數學系

姓名職稱：林琦焜 教授

前往國家：澳大利亞 Wollongong(臥龍岡)

出國期間：2012/12/01~2012/12/08

報告日期：2013/07/02

## 摘要

這個研究主要是探討具有電磁場之非線性 Klein-Gordon(克萊因-戈爾登)方程的零色散極限。首先我們推導具有電磁場之非線性 Klein-Gordon 方程的流體結構然後證明其奇異極限是 anelastic system(非彈性系統)。其次我們研究位能是 Ginzburg-Landau(金茲堡-朗道方程式)形式，並證明半古典-非相對論極限是波映射方程。至於是否有電磁效應則須視尺度而定。我們提出調整能量 (modulated energy) 之修正項的新概念，還有電核—能量不等式，由此可以克服光速項的作用，還有密度趨近於非常數之極限的困難。這個觀念可以視為 Lyapunov(李亞普諾夫)函數的推廣。這是目前研究非線性偏微分方程的重要方法之一。

## 目次

一、目的-----	4
二、過程-----	5
三、心得及建議-----	6

# 本文

## 一、目的

這次我個人受邀前往澳洲雪梨南邊約一小時車程的 Wollongong 大學(臥龍崗大學)訪問,並針對我目前研究的主題做了一個題目是 **Zero Dispersion Limit of the Nonlinear Klein Gordon Equation in Electromagnetic Field** 的專題演講。這個問題是我與吳恭儉博士合作的一系列工作之一。恭儉於 2010 畢業於交大應用數學系研究所,取得博士學位之後,服役一年之後,目前在英國劍橋大學做博士後研究。

這個工作基本上是延續我們關於 **Klein Gordon** 方程的研究,但是現在多了電磁場的效應,自然而然我們可以問電磁場在奇異極限下扮演的角色是什麼?由於在這研究中,我們提出調整能量 (**modulated energy**) 之修正項的新概念,還有電核—能量不等式,由此可以克服光速項的作用,還有密度趨近於非常數之極限的困難。另外一個重要技巧則是引進時間的尺度變換(**time-scaling**),以克服量子非線性項的困難。因為這是全新的想法,因此獲得 **Archive of Rational and Mechanical Analysis** 與 **J. Math. Pures Appl.**這些頂尖數學期刊的青睞,得以在 2010 與 2012 年發表。

這一類奇異極限問題都是源自於 **Schrodinger** 方程的半古典極限 (**semiclassical limit**)。何謂半古典極限?簡而言之,就是要探討量子力學與古典力學之間的關係。當普朗克常數趨近於零時,海森堡不確定性原理可以忽略,則量子力學可以被古典力學所取代。話說如此,但如何給出一個嚴格的數學證明到目前為止仍然是數學分析的難題。最典型的 **WKB** 方法是透過 **Madelung** 變換,將 **Schrodinger** 方程改寫為具有三次微分項的可壓縮 **Euler** 方程,這三次微分項就對應到 **Schrodinger** 方程的色散項。然而它卻是非線性的,所以 **quasilinear symmetric hyperbolic system** 的理論無法直接應用。另外的解決之道是引進 **modified Madulung** 變換,這時候我們容許密度是複數值函數。再經由適當的分解可以將 **Schrodinger** 方程改寫為具有三次微分線性項的 **quasilinear symmetric hyperbolic system**。根據 **quasilinear symmetric hyperbolic system** 的理論,這個系

統會產生震波 (shock wave) ，因此我們只能限制在有限時間內的平滑解這是。WKB 方法的限制，但是這個方法的優點是它可以處理非線性問題。

另外的解決方法是引進類似於 Fourier 變換的 Wigner 變換，將 Schrodinger 方程改寫為 kinetic equation。所以可以將 Boltzmann 方程的理論應用到這個問題。與 Fourier 變換面臨的問題一樣在處理非線性問題時，其 Fourier 反變換有困難，但是這個方法的優點是它探討的是 global in time 的解。

## 二、過程

在我訪問期間適逢其他義大利學者與澳洲其他大學來訪的學者，因此大家可以彼此交換心得。這其中義大利學派仍然維持其數學傳統在變分學領域有許多優秀的年輕人，以及傑出的研究成果。澳洲的學者則在幾何分析，特別是 mean curvature flow (平均曲率流) 這問題有不少年輕人加入，而且他們的訓練是相當扎實，再加上澳洲的經濟實力雄厚，假以時日，澳洲數學界的實力是不容忽視的。

Wollongong 這個城市位於雪梨(Sydney)南方約一個小時的車程，人口並沒有雪梨那麼多，生活步調慢了一些，這個大學的數學系主要側重於經濟與金融數學，所以在財經與財務方面有其特色。在與他們交談中也得知這是他們的策略，因為畢竟不是像雪梨大學或墨爾本大學可以吸收最優秀的學生發展純數學，因此退而求其次發展比較實用的數學也可能吸收到優秀的學生，所以經過十年的奮鬥他們終於得到一些成果，實在令人欣慰。

關於 Nonlinear Klein Gordon 方程，類似於 Schrodinger 方程可以透過 Madelung 變換將 Nonlinear Klein Gordon 方程改寫為流體力學方程。方程裡面出現光速及普朗克常數兩個參數分別代表巨觀與微觀現象，這也說明了這個方程本質上的困難但也顯示出它的多樣性與豐富的內涵。透過方程的流體結構可以推出相關的守恆律以作為基本的估計，然後利用弱收斂與緊緻性理論再根據尺度的選取可以證明 compressible Euler 極限，incompressible Euler 極限。

如果直接處理方程，除了動量之外還需引進相對動量以研究 density

fluctuation 的極限並利用質量守恆方程得極限的具體表現式可以證明各種奇異極限，而極限方程是著名的 wave map 方程。這個結果提供了另一個方向來研究 wave map 方程，具有電磁場之非線性 Klein-Gordon 方程也可以類似地處理。但由於電磁場之效應會造成密度的非均勻性，所以極限方程不再是典型的 Euler 方程而是 anelastic system。這個研究告訴我們 anelastic system 必然是流體力學研究的主流。這個研究引進帶權平方可積函數及其關聯的值譜分解，還有帶權 Helmholtz 分解。整個最關鍵的是 oscillation，所以我們需要藉由 wave group 來研究。如果有充分的 cancellation 就可得出結論。因為有非線性項，自然會出現 Resonance。而這是非線性方程研究最核心的部分。

### 三、心得及建議

交大建模中心有一部分的研究核心是財務數學；而 Wollongen 大學在這部分是強項，我相信這部分彼此能有合作，對於交大而言是一個很好的選擇。我個人以先口頭邀請對方抽空前來交大訪問。

在訪問期間遇到一位澳洲國立大學的博士班學生；他是一個澳洲原住民，正如在電影「澳大利亞」裡面的原住民，看起來就是比較純真、樂觀且友善，我看他與每個人都能夠交談，而我聽他的演講，報告是頭頭是道，來龍去脈都掌握得很清楚。由此可知數學並不是屬於特別膚色或民族的產品，只有任何一個地方提供在自由獨立的環境下，就可以有一番作為，而且相對而言，數學所需的經費並不高，但所得的成果卻是最可觀的。這是最值得教育、研究投資。

最後感謝教育部提供經費的補助，讓我在數學研究之餘，也可以與其他地方的好數學家有一些交流。