行政院所屬各機關因公出國人員出國報告書
（出國類別：研討會）

「PIMCO 2009 Client Conference」

心得報告

債券利率曲線配適與投資之應用

服務機關：中央銀行

出國人職稱與姓名：賀副研究員蘭芝

出國地點：美國加州

出國期間：98 年 3 月 13 日至 98 年 3 月 19 日

報告日期：98 年 7 月

目　錄

圖表目錄

債券利率曲線配適與投資之應用

壹、 前言

PIMCO Client Conference 為每三年舉辦一次，本次主題為「Evolution or Revolution – The Future of Investing」，主要目的在與客戶溝通其目前及未來的資產管理想法，並提出新的投資策略或產品。職於會後訪談負責 Portable Alpha Strategies，素有「PIMCO Cash Machine」之稱的 Managing Director，Mr. Changhong Zhu，就債券利率曲線配適（Curve Fitting）及其相關投資之應用深入討教。

本研究報告謹將心得依章節安排如下，冀望對本行外匯存底投資管理策略有所啟發。第貳章摘要整理學術界、實務界、及各國央行常用之利率曲線配適方法，並開發一套 Excel 實作版本之 Cubic-Spline Fitting，方便本行日常使用；第參章以個案研討方式，介紹利率曲線配適在債券投資之應用，配適所得之即期利率曲線與遠期利率曲線，將可應用在相對價值交易分析（Relative Value Trading Analysis）、駕馭利率曲線策略（Riding on the Curve Strategy）等；第肆章為結論與未來發展方向。

貳、 利率曲線配適（Curve Fitting）方法

一、 配適方法摘要

殖利率曲線（yield curve）係依債券到期日，將持有到期收益率（yield to maturity）標出，所得到的一條間隔時間不規則（irregular interval）、且為間斷時間型（discrete-time）的曲線。對兩支到期日相同、價格相同的債券而言，票息高（低）的債券，殖利率較高（低），殖利率受此票息效果（coupon effect）影響，所包含的投資報酬率訊息並不純淨；再者，於任何時點，市場上流通之債券籌碼有限，到期日間隔時間不一定規則，因此，在為利率衍生性商品訂價時，極可能面臨無相對應之到期收益率可供參考的情形；或者，在做債券相對價值交易時（如美國公債相對於德國公債），兩條殖利率曲線上，並無對應之到期日可供分析的情形。

為解決上述問題，由付息債券之資料中，配適出一條間隔時間規則（regular interval）、且為連續時間型（continuous-time）的即期利率曲線（spot curve or zero-coupon curve）便為債券投資領域相當重要的基本工作。學術界早自 1975 年即開始發展不同的配適方法，參見表一，一般而言，無母數之 Spline-based 方法，因函數較具彈性，配適結果較好；相對而言，母數法則因所需估計參數較少，使得配適結果較差，但其估計參數具有經濟意義，分別代表殖利率曲線之水準值、斜率與曲度，較易解讀。實務界採用時，多在「配適精準」與「方便計算」兩因素間取捨。BIS（2005）曾調查主要央行

所使用的配適方法，參見表二，美國、英國、加拿大、與日本採用無母數之Spline-based 方法，其他歐陸國家則多採用母數法。

表一、利率曲線配適方法整理

方法	特性
無母數法	
Interpolation（內差法）	Linear Interpolation（線性內差） Logarithmic Interpolation（指數型內差）
Polynomial Model（多項式法）	F-order Polynomial Function: $y_i = \alpha + \beta_1 N_i + \beta_2 N_i^2 + \cdots + \beta_F N_i^F + \varepsilon_i$, for the i-th bond Regression Method: $P_i = \beta_1 C_{1i} + \beta_2 C_{2i} + \cdots + \beta_T \left(C_{Ti} + F\right) + \varepsilon_i$, for the i-th bond with dirty price P
Spline Method	Cubic Spline – McCullough (1975) uses regression splines to reduce the discount rate fluctuation. The effectiveness of the cubic spline discount curve is evaluated by miminizing $\sum_{i=1}^{N}\left(P_i - \hat{P}_i(\delta)\right)^2$, where δ represents discount function. Fisher, Nychka and Zervos (1995) is a smoothed cubic spline, which miminizes $\sum_{i=1}^{N}\left(P_i - \hat{P}_i(f)\right)^2 + \lambda\int_0^T \left[f''(s)\right]^2 ds$, where λ is a constant. The value of λ is determined by generalized cross-validation (GCV). Waggoner (1997) is a modified smoothed cubic spline, which miminizes $\sum_{i=1}^{N}\left(P_i - \hat{P}_i(f)\right)^2 + \int_0^T \lambda(s)\left[f''(s)\right]^2 ds$, where $f''(s)$ is the second derivative of the fitted forward curve and T is the maturity of the longest-dated bond. The term $\lambda(s)$ is the "variable roughness penalty (VRP)", where $\lambda(t) = \begin{cases} 0.1 & 0 \le t \le 1\ yr \\ 100 & 1 \le t \le 10\ yr \\ 100{,}000 & 10 \le t \end{cases}$. Exponential Spline –Vasicek and Fong (1982) Basis spline (B spline) – Shea (1985)
優點	1. More flexible functions.

	2. Fitting various shapes of yield curve better with smaller RMSEs.
缺點	Need subjective judgement on the number of knot points. (There may be objective ways to decide the optimal number of knot points, see Ramaswamy, S. (Aug 2000), BIS Banking Papers, No. 4)
母數法	
Nelson and Siegel (1987)	Parsimonious exponential specification of discount factors. The forward rate is $f(T)=\beta_0+\beta_1\exp\left(\frac{-T}{\tau_1}\right)+\beta_2\left(\frac{T}{\tau_1}\right)\exp\left(\frac{-T}{\tau_1}\right)$, where T is the maturity, and $\beta=(\beta_0,\beta_1,\beta_2,\tau_1)$ is the vector of parameters describing the curve. The spot curve is $r(T)=\beta_0+(\beta_1+\beta_2)\frac{\tau_1}{T}\left(1-\exp\left(\frac{-T}{\tau_1}\right)\right)-\beta_2\exp\left(\frac{-T}{\tau_1}\right)$.
Svensson (1995)	Extend the Nelson and Siegel (1987) model by: $f(m,\beta)=\beta_0+\beta_1\exp\left(\frac{-m}{t_1}\right)+\beta_2\left(\frac{m}{t_1}\right)\exp\left(\frac{-m}{t_1}\right)+\beta_3\left(\frac{m}{t_2}\right)\exp\left(\frac{-m}{t_2}\right)$, and $\beta=(\beta_0,\beta_1,\beta_2,\beta_2,t_1,t_2)$ is the vector of parameters describing the curve.
優點	1. Fewer parameters need to be estimated. 2. Jordan and Mansi (2000): the user is not required to specify knot points, the choice of which determines the effectiveness of cubic spline curves.
缺點	1. Jordan and Mansi (2000): inferior fitting and less flexible than spline-based curves. Usually, the fit is inaccurate at the very short (below 6m) end and the long end. 2. Anderson and Sleath (1999): the paramatric method exhibits a significant difference to the observed curve. A cubic spline-based fitted curve such as that proposed by Waggoner (1997) produces a more realistic curve.

資料來源：作者整理

表二、主要央行所用的配適方法

央行	配適方法	到期日範圍
Belgium	Svensson (1995) or Nelson-Siegel (1987)	Couple of days ~ 16 years
Canada	Merrill Lynch Exponential Spline	3 months ~ 30 years
Finland	Nelson-Siegel (1987)	1 ~ 12 years
France	Svensson (1995) or	Up to 10 years
Germany	Svensson (1995)	1 ~ 10 years
Italy	Nelson-Siegel (1987)	Up to 30 years
Japan	Smoothing Splines	1 ~ 10 years

Norway	Svensson (1995)	Up to 10 years
Spain	Svensson (1995) (Nelson-Siegel (1987) before 1995)	Up to 10 years
Sweden	Smoothing Splines and Svensson (1995)	Up to 10 years
Switzerland	Svensson (1995)	1 ~ 30 years
UK	Waggoner (1997)'s Cubic Spline with VRP (Svensson (1995) between 1982/01 and 1998/04)	Up to 30 years
US	Smoothing Splines	1 ~ 10 years

資料來源：BIS (Oct 2005), "Zero-coupon yield curves: technical documentation." BIS Papers No 25.

二、 Cubic-Spline Fitting 原理

考量配適精確度與主要央行經驗，本研究報告擬採 Cubic-Spline Fitting Method，本節介紹其配適原理。McCullough（1975）將到期面額（F）為 100 元之債券現值表達如下：

$$P = CD_1 + CD_2 + CD_3 + \ldots + (C + F)D_T, \tag{1}$$

其中 P 為債券價格，C 為票息，D_t 為各付息日之折現因子，$t = 1, .., T$，即 $D_t = 1 / (1 + R_t)^t$，而 R_t 為對應於各付息日之即期利率。假設折現函數為一條隨時間遞減（到期日越長，折現因子越小）、平滑、且凹向時間軸的曲線（參見圖一），則在數學上，折現函數可以三階多項式（third-order polynomial）表達如下：

$$D(t) = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + b_3 t^3, \tag{2}$$

其中 b_0, b_1, b_2, b_3 為估計參數。因此，式（1）債券價格可改寫成：

$$P = \sum_{t=1}^{T} C(t)D(t), \tag{3}$$

將式（2）代入式（3）可得到：

$$P = \sum_{t=1}^{T} C(t)\left(b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + b_3 t^3\right), \tag{4}$$

將式（4）重新整理：

$$P = b_0\left[\sum_{t=1}^{T} C(t)\right] + b_1\left[\sum_{t=1}^{T} tC(t)\right] + b_2\left[\sum_{t=1}^{T} t^2 C(t)\right] + b_3\left[\sum_{t=1}^{T} t^3 C(t)\right], \tag{5}$$

式（5）中括弧內所代表的是一債券的各個付息日與所收到的票息，為已知現

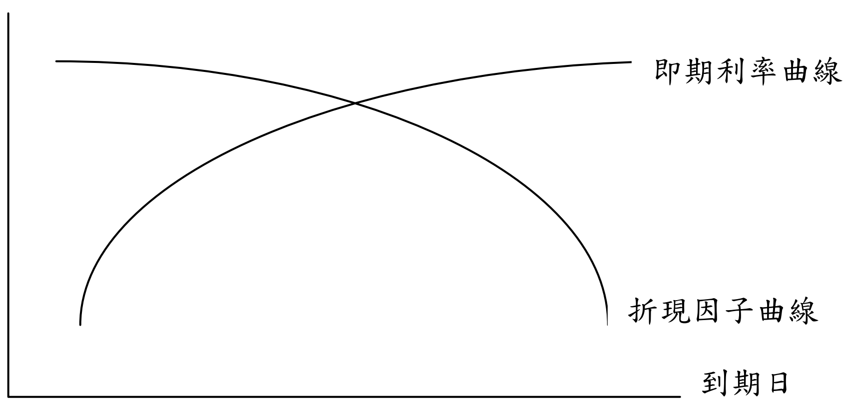
金流量，P 為債券的含息價格（dirty price），則 b_0, b_1, b_2, b_3 參數便可用普通最小平方法（Ordinary Least Squares，OLS）估計出來。將估計參數代回式（2)，便可得知各個付息日之折現因子，再將折現因子轉換，便得出各付息日之即期利率（spot rate)，

一年付息一次：$R_t = \left(\dfrac{1}{D_t}\right)^{1/t} - 1$，

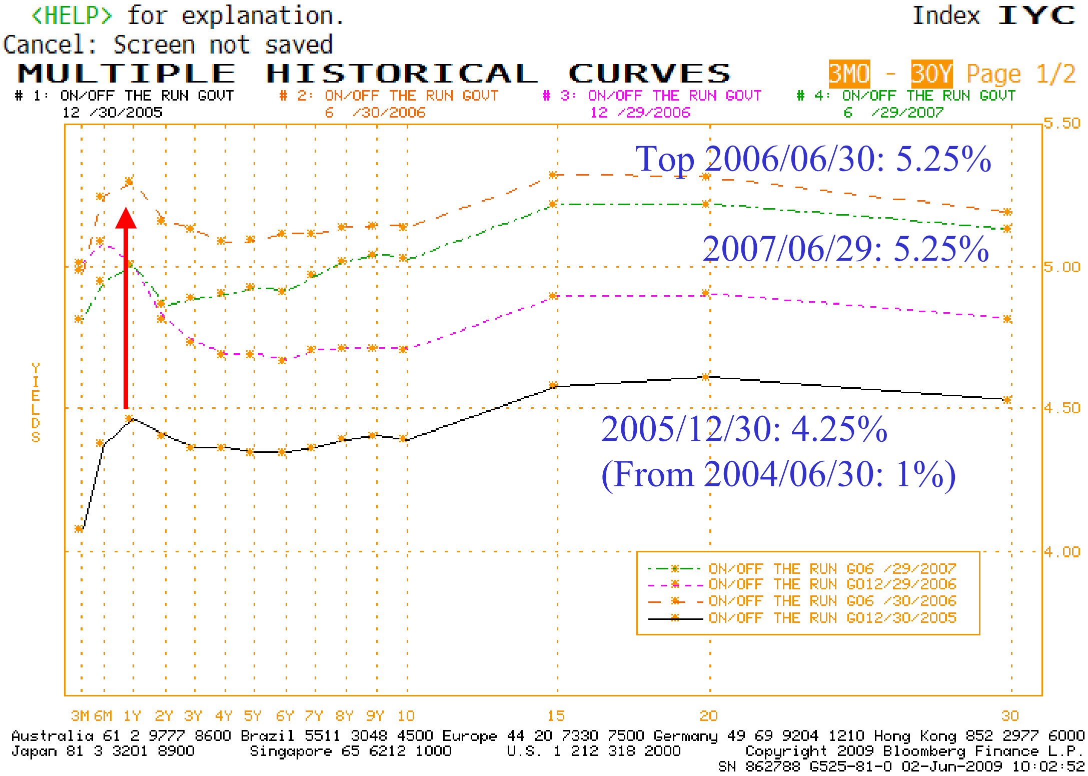
半年付息一次：$R_t = \left(\left(\dfrac{1}{D_t}\right)^{1/2t} - 1\right) * 2$。

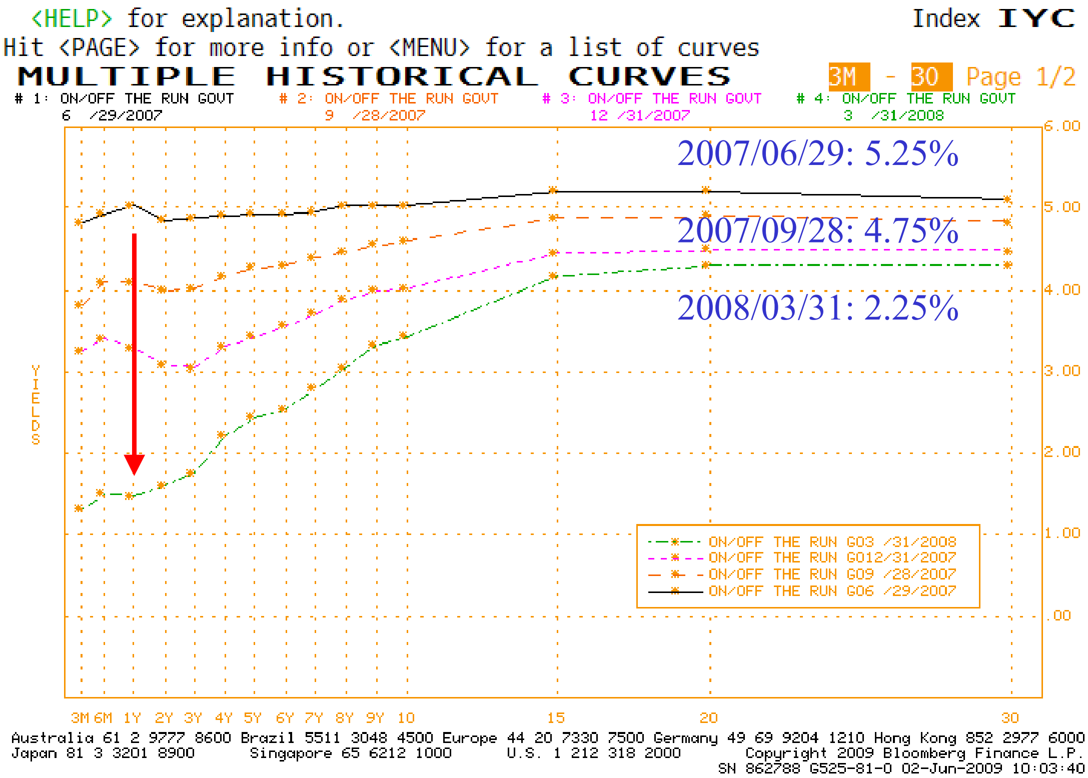
雖然上述簡單三階多項式，可確保配適出一條隨時間遞減、且平滑凹向時間軸的折現因子曲線，亦即，可配適出一條隨時間遞增、且平滑凹向時間軸的即期利率曲線（參見圖一)；唯實際上，債券殖利率曲線常呈現複雜形狀，尤其在政策利率調整進入尾聲階段，殖利率曲線前端部份之曲度變化相當劇烈(參見圖二)，因此，宜將整條殖利率曲線分成數小段來配適。

圖一、折現因子與即期利率曲線



圖二、美國公債殖利率曲線變化





文獻指出，欲將整條利率曲線分成數小段，分節點（knot point）之選擇是門藝術，取決於市場經驗與投資者需求，McCullough（1975）主張分節點之個數約當於債券支數取平方根（$\sqrt{No.of\ Bonds}$），Fisher et.al.（1995）與Waggoner（1997）則主張約當於債券支數的 1/3，並儘量使每區段內所含的債券支數相等。其次，雖然分成數小段配適，但組合起來之整條曲線仍需保持平滑，以債券術語來說，整條曲線在分節點上，需保持相鄰兩段之利率水準(level)、斜率（slope）、與曲度（curvature）能夠相連，為滿足上述三條件，須改用限制最小平方法（Restricted Least Squares，RLS）估計各區段內之參數，詳細估計說明請參見附錄。

三、Cubic-Spline Fitting 之 Excel 實作

本節實作出一套 Excel 版本的 Cubic-Spline Fitting，可針對各國公債、國際機構債、利率交換等，每日配適出即期利率曲線（spot curve）與遠期利率曲線（forward curve），供投資分析參考。

（一）G3 公債

表三 Panel A 至 Panel C 為 2009 年 7 月 16 日針對 151 支美國公債、42 支德國公債、與 35 支英國公債所配適出的各天期即期利率，圖三 Panel A 至 Panel C 則分別圖示各國殖利率曲線、即期利率曲線、與每年的 1 年期遠期利率曲線（1Y1Y forward curve）。

由圖三 Panel C 英國公債即期利率曲線便可看出曲線配適為一門藝術，除上述分節點之選擇外，尚需考慮是否包含所有債券。英國公債殖利率曲線中，有兩支殖利率水準遠高於相鄰年期之債券，一支係 1972/01/26 發行的 43 年期券，距到期日 5.53 年，息票率 7.75%，價格$113.243，殖利率為 4.94%，流通在外餘額佔發行餘額只剩 51%；另一支係 1978/06/15 發行的 39 年期券，距到期日 8.41 年，息票率 12%，價格$138.879，殖利率為 6.18%，流通在外餘額佔發行餘額只剩 2%（見表三 Panel C－(1)）。若包含此兩支冷門券，則配適出的即期利率曲線在 5~10 年期部份會受到強力牽引而偏向上方；若排除此兩支券，則配適出的即期利率曲線，曲度將較緩和，基於市場流動性考量，第參章個案研討時，將不包含此兩支冷門英國公債（見表三 Panel C－(2)）。

表三、G3 公債即期利率

Panel A、美國公債即期利率

	7/16/2009	Mature_DT	CPN	Dirty_Px	Obs Yld	Maturity	DF D(t) = b0+b1*t+b2*t^2+b3*t^3	Spot Rate
1	912828DZ Govt	7/15/2010	3.875	103.412	0.46%	1.00	0.9965	0.35%
49	912828LB Govt	7/15/2012	1.500	99.860	1.59%	3.00	0.9529	1.62%
81	912828KY Govt	6/30/2014	2.625	100.848	2.51%	4.96	0.8810	2.57%
82	912828CT Govt	8/15/2014	4.250	110.113	2.53%	5.08	0.8759	2.63%
117	912828KQ Govt	5/15/2019	3.125	96.832	3.61%	9.83	0.6742	4.05%
118	912810ED Govt	8/15/2019	8.125	139.755	3.79%	10.08	0.6638	4.11%
142	912810FJ Govt	8/15/2029	6.125	124.759	4.47%	20.08	0.3819	4.85%
151	912810QB Govt	5/15/2039	4.250	97.181	4.49%	29.83	0.2495	4.71%

Panel B、德國公債即期利率

	7/16/2009	Mature_DT	CPN	Dirty_Px	Obs Yld	Maturity	DF D(t) = b0+b1*t+b2*t^2+b3*t^3	Spot Rate
1	EH535484 Corp	9/10/2010	4.000	107.006	0.83%	1.15	0.9960	0.35%
21	ED698221 Corp	1/4/2015	3.750	107.509	2.64%	5.47	0.8711	2.54%
32	EH826226 Corp	7/4/2019	3.500	101.580	3.37%	9.97	0.7025	3.57%
33	GG718242 Corp	1/4/2024	6.250	128.200	3.95%	14.47	0.5546	4.12%
37	EC215301 Corp	1/4/2030	6.250	130.240	4.25%	20.47	0.4043	4.47%
42	EH469710 Corp	7/4/2040	4.750	111.281	4.11%	30.97	0.2831	4.12%

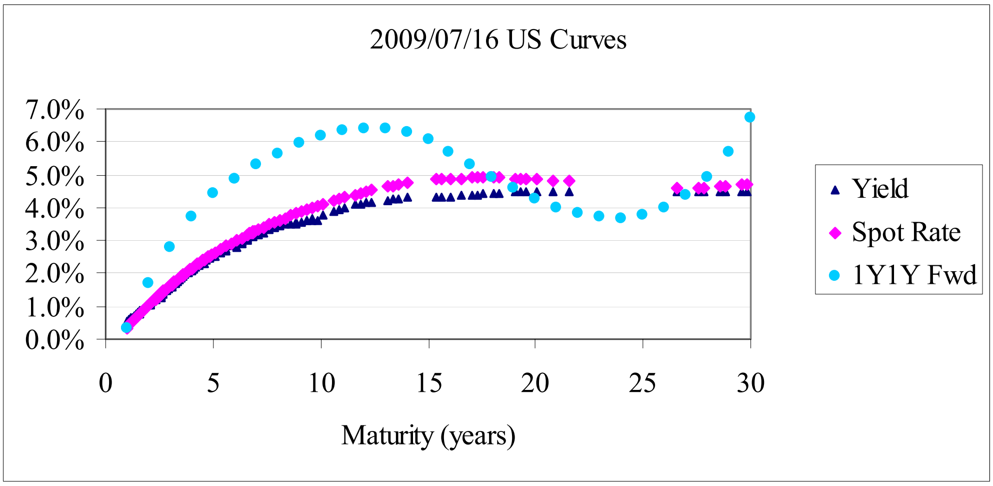
Panel C、英國公債即期利率

(1)	7/16/2009	Mature_DT	CPN	Dirty_Px	Obs Yld	Maturity	DF D(t) = b0+b1*t+b2*t^2+b3*t^3	Spot Rate
1	GG718322 Corp	11/25/2010	6.25	108.167	0.86%	1.36	0.9875	0.93%
10	EC624721 Corp	9/7/2014	5.00	111.851	2.88%	5.14	0.8214	3.86%
11	ZZ202100 Corp	1/26/2015	7.75	113.243	4.94%	5.53	0.8044	3.97%
12	ED153094 Corp	9/7/2015	4.75	110.995	3.08%	6.14	0.7796	4.09%
15	GG712874 Corp	8/25/2017	8.75	140.193	3.50%	8.11	0.7132	4.21%
16	ZZ202101 Corp	12/12/2017	12.00	138.879	6.18%	8.41	0.7045	4.21%
17	EG456904 Corp	3/7/2018	5.00	112.784	3.51%	8.64	0.6978	4.21%
19	EH887630 Corp	9/7/2019	3.75	98.501	3.94%	10.14	0.6565	4.19%
25	GG737572 Corp	12/7/2028	6.00	122.339	4.34%	19.39	0.4225	4.49%
28	EH867755 Corp	9/7/2034	4.50	100.782	4.47%	25.14	0.3114	4.69%
31	EH736811 Corp	9/7/2039	4.25	98.133	4.46%	30.14	0.2472	4.69%
35	ED946246 Corp	12/7/2055	4.25	97.080	4.42%	46.39	0.1265	4.51%

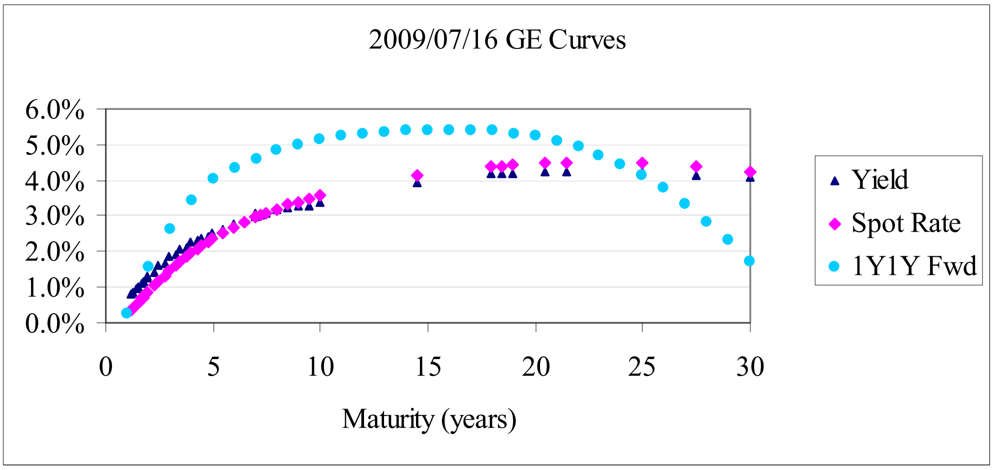
(2)	7/16/2009	Mature_DT	CPN	Dirty_Px	Obs Yld	Maturity	DF D(t) = b0+b1*t+b2*t^2+b3*t^3	Spot Rate
1	GG718322 Corp	11/25/2010	6.25	108.167	0.86%	1.36	0.9817	1.36%
10	EC624721 Corp	9/7/2014	5.00	111.851	2.88%	5.14	0.8564	3.04%
17	EH887630 Corp	9/7/2019	3.75	98.501	3.94%	10.14	0.6673	4.03%
26	EH867755 Corp	9/7/2034	4.50	100.782	4.47%	25.14	0.3096	4.72%
33	ED946246 Corp	12/7/2055	4.25	97.080	4.42%	46.39	0.1262	4.51%

圖三、G3 公債即期利率曲線

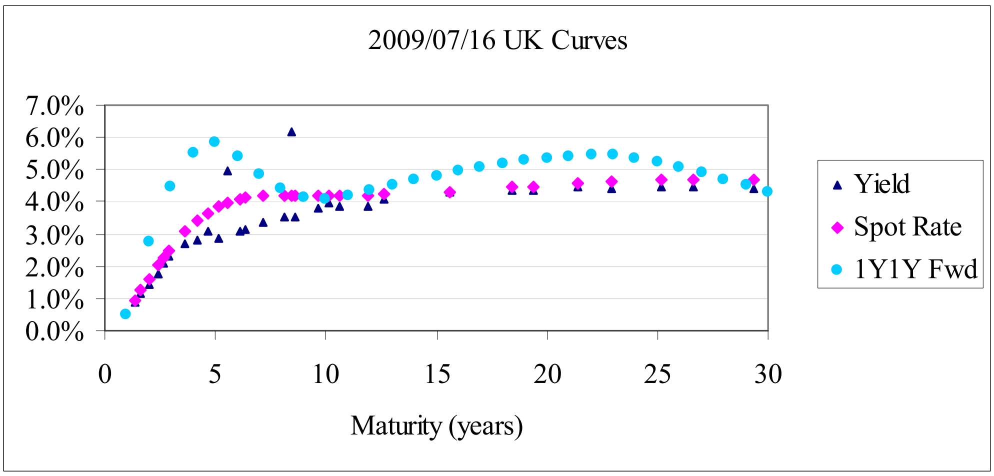
Panel A、美國公債即期利率曲線



Panel B、德國公債即期利率曲線



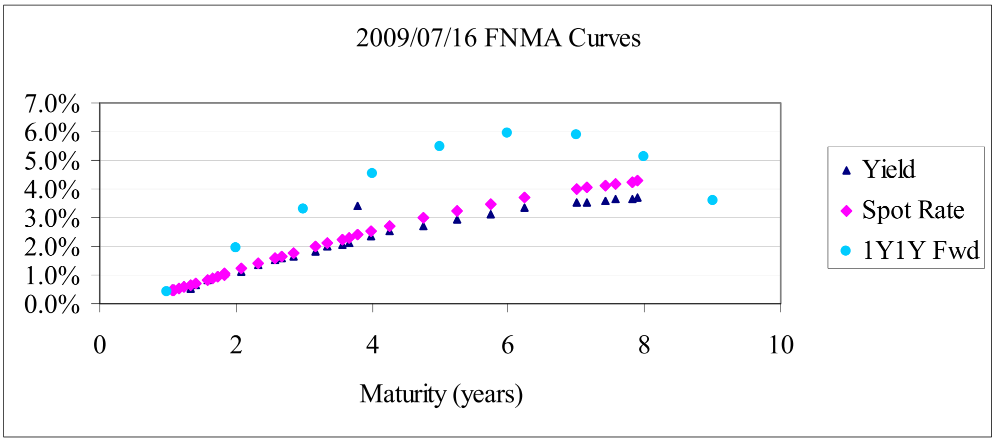
Panel C、英國公債即期利率曲線

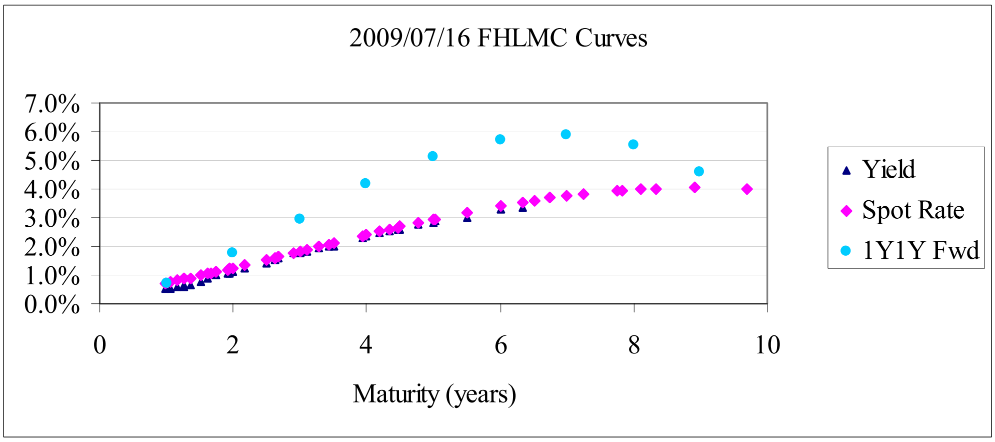


（二）國際機構債與利率交換

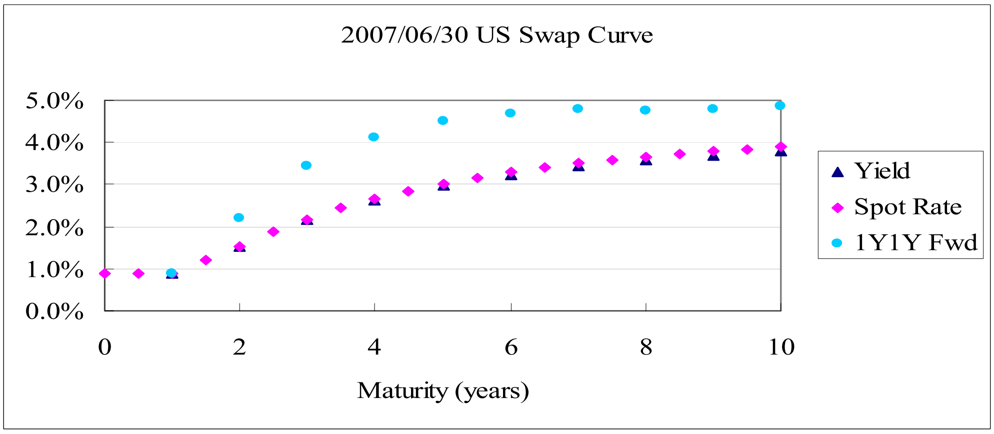
圖四為配適出的美國機構債（Fannie Mae、Freddie Mac）即期利率曲線，圖五為美國利率交換（Interest Rate Swap）即期利率曲線。

圖四、美國機構債即期利率曲線





圖五、美國利率交換即期利率曲線



參、 債券投資應用個案研討

一、 相對價值交易分析

以債券訂價數學公式來看，

$$P=\frac{C}{(1+Y)}+\frac{C+F}{(1+Y)^2}=\frac{C}{(1+R_1)}+\frac{C+F}{(1+R_2)^2} \quad ,$$

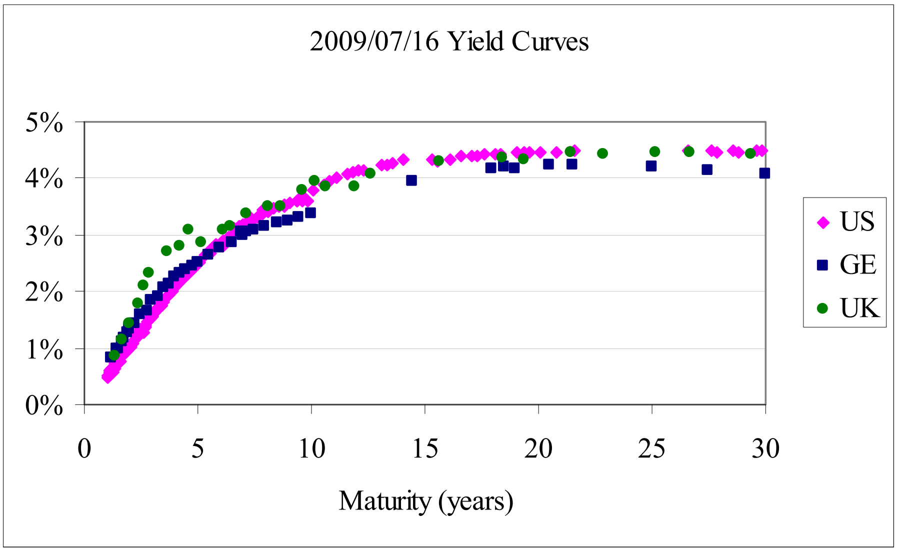
殖利率（Y）係假設債券到期前，每年所收的票息（C）皆能以相同的利率（Y）進行再投資，所算出的債券投資報酬率，又殖利率受票息效果影響，票息越高的債券，殖利率越高，隱含每年的再投資報酬率越高，此每年相同投資報酬率的假設並不符實際，因此，殖利率所包含的投資報酬率訊息並不純淨。即期利率（R）則將每年所收到的票息，依債券現值換算成當年期報酬率，因此，每年的投資報酬率（R_1、R_2）皆不相同，即期利率主要的用意，是將某段投資期間（investment horizon）付息債券的投資報酬率，改以零息債券利率來表達，不受票息效果影響，方便比較債券的相對價值。

以上述兩年期付息債券訂價公式為例，殖利率是每年即期利率之平均，當利率曲線為正斜率時，殖利率（Y）會低於同天期即期利率（R_2），且當利率曲線越陡峭（平緩）時，殖利率低於即期利率越多（少），換言之，殖利率會低估債券的投資報酬率，因此，實務上在做同天期債券相對價值分析時，不會比較殖利率，而是比較即期利率，才能清楚地呈現相對價值。

圖六顯示 G3 公債殖利率曲線比較，表四列示詳細比較資料（摘自表三），以 10 年期左右公債為例，英債殖利率為 3.94%，較美債殖利率 3.61%高出 33 bps

，看似較優；但以即期利率來看，報酬率卻較美債低 2 bps，唯此 2 bps 是否足夠顯著拒絕英國公債？因兩支債券到期日仍有些微差異，將之調成 10 年期整的即期利率，即可清楚看出英債其實較美債報酬率低 8 bps。同理，1 年期英債比美債即期利率高出 80 bps，相當具有相對價值。

圖六、G3 公債殖利率曲線比較



表四、G3 公債相對價值交易分析

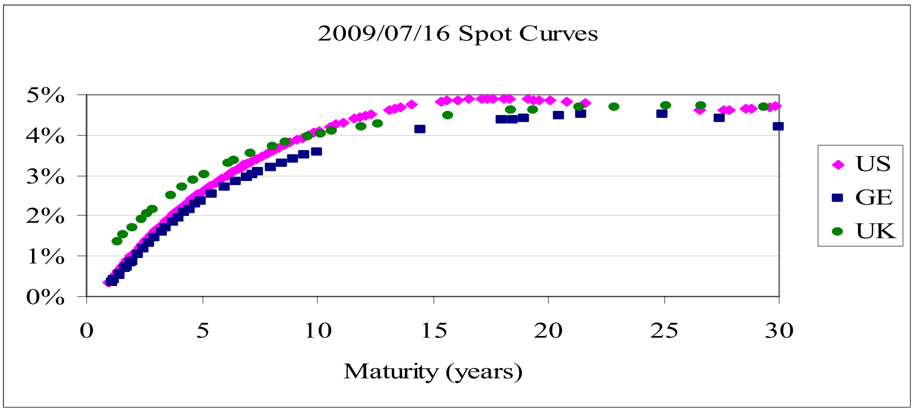
	Maturity (years)	Coupon	Yield	Spot Rate	Maturity (years)	Adjusted Spot Rate
UK	10.14	3.750%	3.94%	4.03%	10	4.01%
US	9.83	3.125%	3.61%	4.05%	10	4.09%
Diff. (bps)			33	-2		-8
UK	5.14	5.00%	2.88%	3.04%	5	2.99%
US	5.08	4.25%	2.53%	2.63%	5	2.59%
Diff. (bps)			35	41		40
UK	1.36	6.250%	0.86%	1.36%	1	1.15%
US	1.00	3.875%	0.46%	0.35%	1	0.35%
Diff. (bps)			40	101		80

（一）G3 公債相對價值交易分析

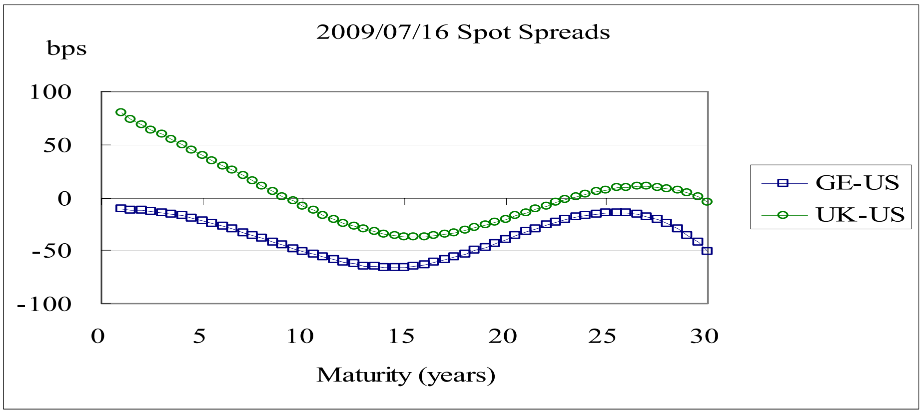
圖七 Panel A 顯示 2009/07/16 配適之 G3 公債即期利率曲線，Panel B 顯示即期利率利差。

圖七、G3 公債相對價值交易分析

Panel A、G3 公債即期利率曲線



Panel B、G3 公債即期利率利差



由圖七即期利率曲線可明顯看出，9 年期以下部份，越短天期的英債相對於美債之即期利率越高（數字詳見表四），因此「買英債、賣美債」的相對價值交易，宜考慮短期券（反觀圖六殖利率曲線則不易判斷）；另一方面，德債

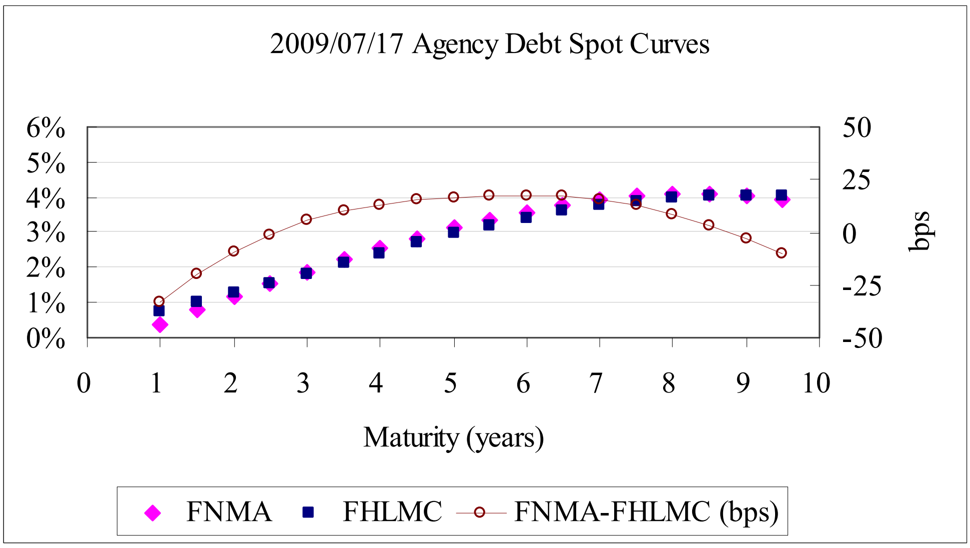
相對於美債之即期利率而言，宜優先考慮 15 年期的「賣德債、買美債」相對價值交易。

值得注意的是，上述相對價值交易，僅針對某一時點（2009/07/16）進行跨國比較分析，實際操作時，宜長時間觀察跨國即期利率利差的歷史變化，做為是否執行相對價值交易之參考。以表四中 1 年期英債與美債即期利率利差 80 bps 為例，若目前的 80 bp 利差遠大於歷史平均值，則可立刻進行「買英債、賣美債」相對價值交易，待利差縮小，回復歷史平均值，即可獲利了結。

（二）美國機構債相對價值交易分析

圖八顯示美國 Fannie Mae 與 Freddie Mac 機構債之即期利率曲線與利差，Fannie Mae 債券在 3 至 8.5 年期部分較 Freddie Mac 具相對價值，其中又以 5 至 6.5 年期券之即期利率利差最大，約 18 bps。

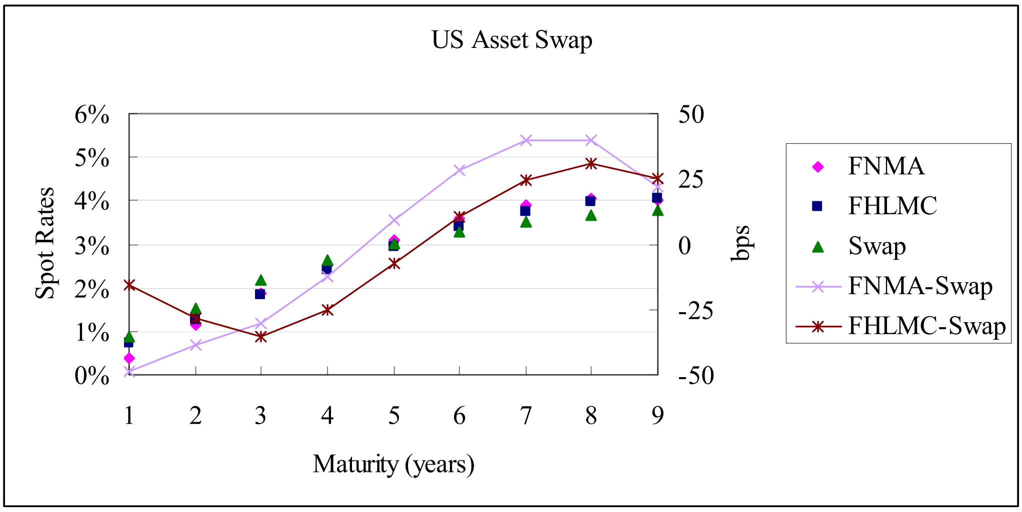
圖八、美國機構債相對價值交易分析



（三）美國資產交換相對價值分析

圖九顯示美國機構債與利率交換之即期利率曲線與利差，以 Fannie Mae 債券與利率交換之利差而言，4 年期（含）以下可進行「Sell FNMA、Receive Swap」資產交換，其中又以 1 年期最具相對價值；5 年期（含）以上可進行「Buy FNMA、Pay Swap」資產交換，其中又以 7、8 年期最具相對價值。

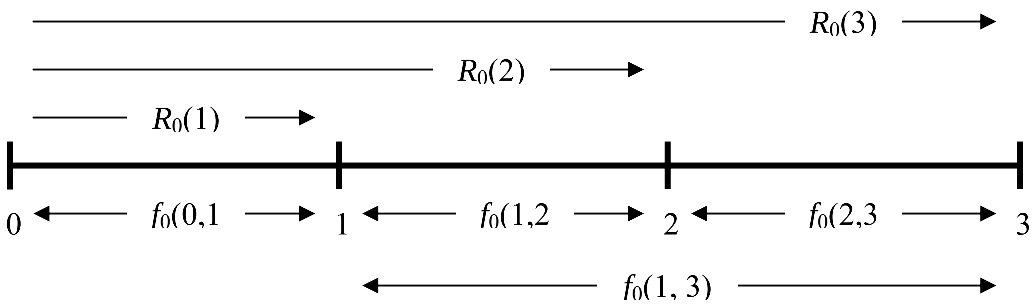
圖九、美國資產交換相對價值分析



Maturity (years)	FNMA Spt Rt	FHLMC Spt Rt	Swap Spt Rt	FNMA-Swap (bps)	FHLMC-Swap (bps)
1	0.40%	0.72%	0.88%	-49	-16
2	1.16%	1.25%	1.54%	-38	-29
3	1.87%	1.82%	2.17%	-30	-35
4	2.53%	2.40%	2.66%	-12	-25
5	3.11%	2.95%	3.02%	9	-8
6	3.58%	3.41%	3.30%	28	11
7	3.91%	3.76%	3.51%	40	25
8	4.06%	3.98%	3.67%	40	31
9	4.01%	4.04%	3.79%	22	25

二、 駕馭利率曲線策略

配適出即期利率曲線後，便可依下列關係進一步解析出遠期利率曲線：



$$(1+R_0(t))^t * (1+f_0(t,t+\Delta t)) = (1+R_0(t+\Delta t))^{t+\Delta t}, \quad t=1,....,T-\Delta t$$ ，

以每年的 1 年期遠期利率曲線（1Y1Y Forward Curve）為例，

第 1 年（$t=1$）的 1 年期（$\triangle t=1$）遠期利率：

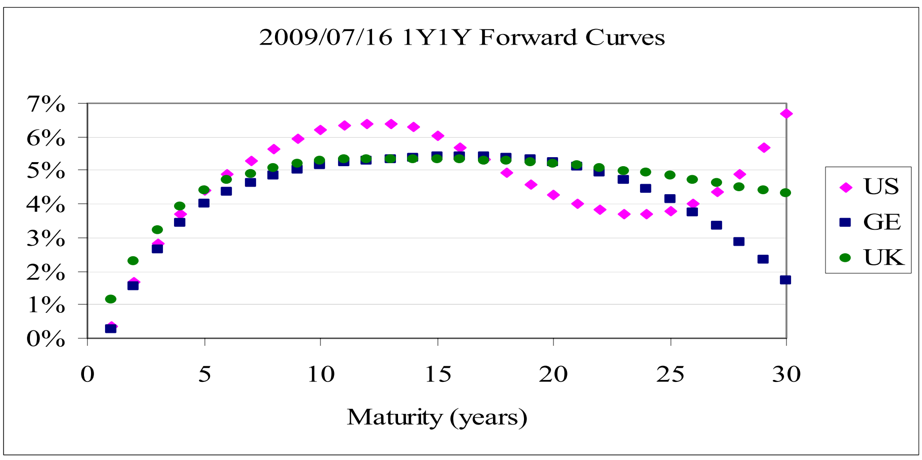
$f_0(1, 2) = (1 + R_0(2))^2 / (1 + R_0(1)) – 1$，

第 2 年（$t=2$）的 1 年期（$\triangle t=1$）遠期利率：

$f_0(2, 3) = (1 + R_0(3))^3 / (1 + R_0(2))^2 - 1$，...，

依此類推，直到求出整條遠期利率曲線，參見圖十。

圖十、G3 公債遠期利率曲線



遠期利率反映市場對未來利率走勢的預期：

$f_0(t, t+\Delta t) = E_0[R_t(\Delta t)]$，

例如，$f_0(1, 2) = E_0[R_1(1)]$，$f_0(2, 3) = E_0[R_2(1)]$，...，依此類推，以圖十中美國 1Y1Y 遠期利率曲線為例，斜率最陡處約為前端 1~3 年期與尾端 28~30 年期，$f_0(2, 3)$ 遠期利率約 2.8%，代表投資人認為未來第 2 年至第 3 年的 1 年期報酬率為 2.8%，現在持有 3 年期美國公債，待一年後該公債變成 2 年期，1 年間的報酬率很可能為 2.8%，將有顯著資本利得；同理，$f_0(29, 30)$遠期利率約 6.8%，代表投資人認為未來第 29 年至第 30 年的 1 年期報酬率為 6.8%，現在持有 30 年期美國公債，待一年後該公債變成 29 年期，1 年間的報酬率很可能為 6.8%，將有顯著資本利得，因此，現在可買進 3 年期與 30 年期美國公債，並持有一年，坐收資本利得。此買進持有（buy and hold）遠期利率曲線上斜率最陡年期的債券，並等待資本利得的策略，業界稱為駕馭利率曲線策略。

值得注意的是，遠期利率反映市場對未來利率的預期，駕馭利率曲線策略能否奏效，取決於遠期利率是否能準確地預測未來即期利率，承上例，現在的 $f_0(1, 3)$遠期利率是否等於 1 年後的 2 年期即期利率，即 $f_0(1, 3) = R_1(2)$？現在的 $f_0(1, 30)$遠期利率是否等於 1 年後的 29 年期即期利率，$f_0(1, 30) = R_1(29)$？若現在持有 3 年期（30 年期）美國公債，一年之後 2 年期（29 年期）利率非但不下跌，反而走升，將遭受資本損失。

因此，遠期利率是否為未來即期利率之不偏估計值？此為實證問題，須進一步對此假設做實證分析，才能得知駕馭利率曲線策略成功的機率有多大，或

者是否有辦法辨別進場的時機。關於此部份的研究，可利用母數法中的 Nelson and Siegel (1987) Fitting Method 為之，留做未來發展方向。

肆、 結論與未來發展方向

本研究報告摘要整理常見的利率曲線配適方法，並開發一套 Excel 實作版本的 Cubic-Spline Fitting，方便本行日常使用。利率曲線配適主要目的在從可觀察到的殖利率曲線中，萃取出即期利率曲線與遠期利率曲線，以應用在債券投資分析，本報告以個案研討方式，介紹相對價值交易（Relative Value Trading）與駕馭利率曲線策略（Riding on the Curve Strategy）。

唯本研究僅針對某一天的（cross-sectional）利率期間架構，快速辨識（snapshot）相關策略之潛在機會，實際操作前，尚須輔以時間序列（time-series）資料分析，做健全性檢驗（robustness test），以判斷是否值得執行該相對價值交易，或者判斷駕馭利率曲線策略的執行時機等，此為未來研究發展方向。

附錄、限制最小平方法（Restricted Least Squares，RLS）

普通最小平方法（OLS）為計量經濟學中之基本迴歸估計法，迴歸式通常以矩陣方式表達，因此，式（5）可以矩陣方式改寫如下：

$$P = X * B \text{，} \tag{A1}$$

其中 P 代表債券含息價格，為一$[n*1]$矩陣，n 為債券支數；X = $\left[\left[\sum_{t=1}^{T} C(t)\right], \left[\sum_{t=1}^{T} tC(t)\right], \left[\sum_{t=1}^{T} t^2C(t)\right], \left[\sum_{t=1}^{T} t^3C(t)\right]\right]$，代表現金流量，為一$[n*4]$矩陣；$B = [b_0, b_1, b_2, b_3]$，為$[4*1]$之待估計參數矩陣；則待估計參數可由下列矩陣運算估計出來：

$$\hat{B} = \left(X'X\right)^{-1} X'P \text{。} \tag{A2}$$

為將殖利率曲線分成數小段配適，但組合起來之整條曲線仍保持平滑，以數學術語來說，整條折現函數需滿足函數連續（level continuous）、一階微分連續（first-derivative continuous）、與二階微分連續（second-derivative continuous）三條件，以債券術語來說，需保證整條曲線在分節點之兩側，利率水準（level）、斜率（slope）、與曲度（curvature）能夠相等，以下簡述此三條件之推導過程。

猶記得式（2）折現函數，$D(t) = b_0 + b_1t + b_2t^2 + b_3t^3$，若整條曲線扣除最短（$K_0$）與最長到期日（$K_4$），中間有三個分節點，$K_1$、$K_2$、$K_3$，將曲線分為四段，則第 j 小段（$j = 1, 2, 3$）之三階多項式可寫成：

$$D_j(K_j) = b_{0j} + b_{1j}K_j + b_{2j}K_j^2 + b_{3j}K_j^3 \text{，} \tag{A3}$$

對式（A3）取一階微分與二階微分：

$D'_j(K_j) = b_{1j} + 2b_{2j}K_j + 3b_{3j}K_j^2$，

$D''_j(K_j) = 2b_{2j} + 6b_{3j}K_j$，

則 j 小段與相鄰 j+1 小段所須滿足之三條件為：

函數連續：$D_j(K_j) = D_{j+1}(K_j)$，　(A4-1)

一階微分連續：$D'_j(K_j) = D'_{j+1}(K_j)$，　(A4-2)

二階微分連續：$D''_j(K_j) = D''_{j+1}(K_j)$，　(A4-3)

式（A4）代表待估計參數須滿足下列關係式：

$b_{0j} + b_{1j}K_j + b_{2j}K_j^2 + b_{3j}K_j^3 = b_{0j+1} + b_{1j+1}K_j + b_{2j+1}K_j^2 + b_{3j+1}K_j^3$，　(A5-1)

$b_{1j} + 2b_{2j}K_j + 3b_{3j}K_j^2 = b_{1j+1} + 2b_{2j+1}K_j + 3b_{3j+1}K_j^2$，　(A5-2)

$2b_{2j} + 6b_{3j}K_j = 2b_{2j+1} + 6b_{3j+1}K_j$，　(A5-3)

此外，待估計參數尚有一強迫條件須滿足：到期債券之折現因子為 1，

$b_{01} = 1$。　(A5-4)

　　因此，在分節點數為 3 個（$K = 3$）、每區段皆須滿足三個條件的情況下，總共將有 10 條（$r = K * 3 + 1$）限制式，而在區段數為 4 個（$= K + 1$）、每區段皆需估計 4 個參數的情況下，總共將需估計 16 個（$= (K + 1) * 4$）參數，換言之，估計參數之限制式為一[r * $((K+1)*4)$]之矩陣。將估計參數限制式以矩陣方式表達如下：

$r = R * B$，　(A6)

其中 r 代表[10*1]之限制值，R 代表[10*16]之參數限制式矩陣，B 代表[16*1]

之待估計參數矩陣，則式（A6）中各矩陣之詳細元素如下：

$$
R=\left|\begin{matrix}
-1 & -K_1 & -K_1^2 & -K_1^3 & 1 & K_1 & K_1^2 & K_1^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -K_2 & -K_2^2 & -K_2^3 & 1 & K_2 & K_2^2 & K_2^3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -K_3 & -K_3^2 & -K_3^3 & 1 & K_3 & K_3^2 & K_3^3 \\
0 & -1 & -2K_1 & -3K_1^2 & 0 & 1 & 2K_1 & 3K_1^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -2K_2 & -3K_2^2 & 0 & 1 & 2K_2 & 3K_2^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -2K_3 & -3K_3^2 & 0 & 1 & 2K_3 & 3K_3^2 \\
0 & 0 & -2 & -6K_1 & 0 & 0 & 2 & 6K_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -6K_2 & 0 & 0 & 2 & 6K_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -6K_3 & 0 & 0 & 2 & 6K_3 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{matrix}\right|
$$

$$
B=\left|\begin{matrix} b_{01} \\ b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \\ b_{02} \\ b_{12} \\ b_{22} \\ b_{32} \\ b_{03} \\ b_{13} \\ b_{23} \\ b_{33} \\ b_{04} \\ b_{14} \\ b_{24} \\ b_{34} \end{matrix}\right| ,\qquad r=\left|\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{matrix}\right| 。
$$

因估計參數有限制式，普通最小平方法（OLS）無法估計，須改用限制最小平方法（Restricted Least Squares，RLS），依計量經濟學原理，需分兩步驟進行，首先，估計式（A1）$P = X * B$ 中之原始參數，

$\hat{B} = \left(X'X\right)^{-1} X'P$，

此時，$\hat{B}$為[16*1]之原始參數矩陣，$[b_{0j}, b_{1j}, b_{2j}, b_{3j}]$，$j = 1, \ldots, K+1$；$P$ 為$[n*1]$之債券含息價格矩陣；X 為$[n*16]$之現金流量矩陣，$\left[\left[\sum_{t=1}^{T} C(t)\right]_j, \left[\sum_{t=1}^{T} tC(t)\right]_j, \left[\sum_{t=1}^{T} t^2 C(t)\right]_j, \left[\sum_{t=1}^{T} t^3 C(t)\right]_j\right]$，$j = 1, \ldots, K+1$。其次，有限制的參數$\hat{B}_R$則由下列矩陣運算估計出來：

$$\hat{B}_R = \hat{B} + \left[\left(X'X\right)^{-1} R'\right]\left[R\left(X'X\right)^{-1} R'\right]^{-1}\left(r - R\hat{B}\right)。 \quad \text{(A7)}$$

將有限制的估計參數代回折現函數，則可得到整條折現因子曲線：

$D_j(t) = b_{0j} + b_{1j}t + b_{2j}t^2 + b_{3j}t^3$，$j = 1, \ldots, K+1$，詳細元素如下：

$$D(t) = \begin{array}{ll} b_{01} + b_{11}t + b_{21}t^2 + b_{31}t^3, & \textit{for all cash flows where } K_0 < t < K_1 \\ b_{02} + b_{12}t + b_{22}t^2 + b_{32}t^3, & \textit{for all cash flows where } K_1 < t < K_2 \\ b_{03} + b_{13}t + b_{23}t^2 + b_{33}t^3, & \textit{for all cash flows where } K_2 < t < K_3 \\ b_{04} + b_{14}t + b_{24}t^2 + b_{34}t^3, & \textit{for all cash flows where } K_3 < t < K_4 \end{array} \quad \text{(A8)}$$

本研究中，各國公債殖利率曲線所採用的節點如下，

美國：$K_0 = 1$、$K_1 = 5$、$K_2 = 10$、$K_3 = 15$、$K_4 = 30$，

德國：$K_0 = 1$、$K_1 = 5$、$K_2 = 10$、$K_3 = 30$，

英國：$K_0 = 1$、$K_1 = 5$、$K_2 = 10$、$K_3 = 25$、$K_4 = 50$。