行政院所屬各機關因公出國人員出國報告書

（出國類別：研討會）

「瑞士央行進階實證財務研討會」
心得報告

服務機關：中央銀行

出國人職稱與姓名：賀副研究員蘭芝

出國地點：瑞士

出國期間：94 年 2 月 5 日至 94 年 2 月 21 日

報告日期：94 年 7 月

目　錄

表格目錄

期望損失值架構下之最適投資組合

摘要

傳統 Markowitz 最適投資組合形成架構，係控制風險在某一程度下，追求投資組合預期報酬極大，其中所謂風險係以變異數來衡量。本文以不同方法，如，變異數、風險值、期望損失值來衡量風險，並在不同資產報酬率分配，如，常態、實證、極值分配之假設下，分析比較各種架構下所決定出之最適投資組合配置有何不同。實證發現變異數架構所決定出之最適投資組合，其下方風險最大，風險值架構所決定出之最適投資組合下方風險次之，期望損失值架構是最保守的，亦即產生的下方風險最小，最適合謹慎保守的央行採用；而實證分配架構之結果可說是極值分配架構之特例。

期望損失值架構下之最適投資組合

本次瑞士央行（SNB）「進階實證財務專題研討（Advanced Topics in Empirical Finance）」分為五大主題，第一部份 Information Content of Options，講授如何由選擇權市場萃取出隱含之風險中立機率（Risk Neutral Density），風險中立機率反映市場參與者對標的資產未來價格之看法，若風險中立機率出現跳躍性變化，小則代表市場價格正在反映某項消息或事件，並可由該機率分配推算公平價格區間，大則可作為罕見事件發生的預警系統。第二部份 Extremes and Heavy Tails，介紹極值理論，極值理論可用於估計市場發生大幅波動之可能性與規模，單變量極值理論與估計方法，可應用於估計極值分配下之風險值、期望損失值、做壓力測試，多變量極值理論與估計方法，可用以評估當一市場發生巨幅變化時，引發另一市場發生巨幅變化之機率。第三部份 Risk Management for Foreign Reserves，請到 ECB 編著之「Risk Management for Central Bank Foreign Reserves」一書中，第三章之作者 Professor Jerome Kreuser，介紹如何應用動態隨機規劃模型，在設定各種不同限制式，如風險值、預期損失值、甚至外債對外匯準備比率之下，求出最適外匯存底資產配置。第四部份 Market

Microstructure，市場微結構係藉由高頻率資料，如利用日內（intra-day）訂單流量，來解釋證券價格之決定，此類研究最初專注於交易商（primary dealer）如何為個別股票報價，其中買賣價差可分解為三部份：存貨控制成本、訂單處理成本、與逆選擇成本，近來亦應用於解釋債券與匯率價格之決定。而主管機關可藉由觀察逆選擇成本是否放大，來判斷市場上是否存在非公開訊息，亦即市場是否有效率。第五部份 Information in Financial Markets and Financial Stability，文獻發現從 1995 年 1 月至 1999 年 12 月間，重大經濟數據公佈前後，美國國庫券期貨選擇權價格之變化發現：壞消息之公佈會影響風險中立機率分配之偏態與峰態係數，不影響標準差，因此可由公佈前機率分配是否顯著改變，來判斷市場有否內線交易存在，以及即將公佈的是壞消息或好消息。另介紹如何建構一些領先指標來預測銀行與貨幣危機。

本出國報告將結合第二部份理論與第三部份模型，以具體金融商品價格資料，實證分析期望損失值架構下之最適投資組合，以做為我國外匯存底資產配置之參考。

壹、前言

傳統 Markowitz 最適投資組合形成架構，可謂是平均數--變異數架構，此架構係指將風險控制在某一程度下，追求投資組合預期報酬極大，其中所謂風險係以變異數來衡量。以變異數衡量風險，關心的是報酬率異於（包括大於及小於）平均數之程度，然而，保守的投資人更在乎的是報酬率小於平均數之程度，亦即更在乎的是下方風險（Downside Risk）。

風險值由於表達方式簡潔，是近年來主流的衡量下方風險的方式，並且被應用於求解最適投資組合，即所謂的平均數--風險值架構。然而，近年來文獻上發現風險值不具一致性（Coherent）性質（Artzner et al.（1997, 1999）and Jaschke（2001）），用來衡量風險，會發現投資組合風險值大於個別資產風險值加總的反風險分散現象（Acerbi et al.（2001）），用來建構資產配置，會出現投資組合風險值不減反增之現象（Basak and Shapiro（2001））。

另一個下方風險衡量方式，期望損失值，定義為當損失超過風險值時，平均會損失多少，此下方風險衡量方式，近來在文獻上被證明為具有次級可相加性（sub-additivity）（Acerbi et al.（2001）），用來建構資產配置可以補救風險值的缺點（Basak and Shapiro（2001）， Uryasev (2000)，Rockafellar and Uryasev (2000)，Krokhmal et al. (2002))，因此平均數--期望損失值架構是資產配置領域中最新的研究課題。

此外，金融資產報酬率之分配常有厚尾現象，以常態分配之假設來衡量風險值，會使風險值低估，因此文獻上有採用 Student-t 分配者（Campbell et al. (2001)，Lucas and Klaassen (1998))，有採用極值分配者（Bensalah (2002)，Bali (2003)，Longin (1996))。Rockafellar and Uryasev (2000)採用平均數--期望損失值架構，但假設金融資產報酬率為常態分配，來研究投資組合配置；Uryasev (2000)及 Krokhmal et al.(2002)採用平均數--期望損失值架構，但不對金融資產報酬率做任何假設，亦即用實證分配，來研究投資組合配置。

目前為止，尚無文獻結合平均數--期望損失值架構與極值分配，來研究投資組合配置，本研究以不同方法，如，變異數、風險值、期望損失值來衡量風險，並在不同資產報酬率分配，如，常態、實證、極值分配之假設下，分析比較各種架構下所決定出之最適投資組合配置有何不同。實證發現變異數架構所決定出之最適投資組合，其下方風險最大，風險值架構所決定出之最適投資組合下方風險次之，期望損失值架構是最保守的，亦即產生的下方風險最小，應該最適合謹慎保守的中央銀行採用；而實證分配架構之結果可說是極值分配架構之特

例。

本研究章節安排如下，第二節介紹三種不同投資組合形成架構，第三節導出三種不同報酬率分配假設下，如何衡量風險值與期望損失值，第四節提出四項命題以供驗證，第五節描述所用之金融資產資料，第六節為實證結果，結論置於第七節。

貳、投資組合選擇模型

本節介紹三種不同投資組合形成架構。

一、 平均數--變異數架構

傳統 Markowitz 最適投資組合形成架構，即是平均數--變異數架構，此架構係指將變異數控制在某一程度下，追求投資組合預期報酬極大，亦即，投資人追求的是極大化每單位變異數所帶來的預期報酬。

設 w_i, $i = 1\ldots n$, 代表投資組合中第 i 項資產的權重, $W = (w_1, w_2, \ldots, w_n)$ 代表權重向量；$\bar{r}_i$，$i = 1\ldots n$，代表第 i 項資產在投資期間的平均報酬率，$\bar{R} = (\bar{r}_1, \bar{r}_2, \ldots, \bar{r}_n)$ 代表報酬率向量；則投資組合預期報酬率與變異數可以矩陣型式表示為：

$$E[R] = W\bar{R}', \tag{1}$$

$$V[R] = WQW', \tag{2}$$

而最適投資組合即為求解下列非線性規劃問題，在可容忍的變異數水準下，追求預期報酬極大化：

$$\begin{aligned} &\underset{W}{Maximize}\ \ W\bar{R}' \\ &subject\ to\ \ WQW' \le \sigma^2 \\ &\qquad\qquad \sum_{i=1}^{n} w_i = 1, \quad 0 \le w_i \le 1 \end{aligned} , \tag{3}$$

其中，σ^2為可容忍的變異數水準，$0 \le w_i \le 1$ 代表只能買進，不得賣空

之限制。

二、 平均數--風險值架構

令 R 代表投資組合未來報酬率, 風險值定義為投資組合未來損失會大於風險值之機率不得超過 $p\%$：

$$p = Prob(-R > VaR_p), \tag{4}$$

則最適投資組合即為求解下列非線性規劃問題，在可容忍的風險值水準下，追求預期報酬極大化：

$$\begin{aligned} &\underset{W}{Maximize} \quad W\overline{R}' \\ &subject\ to \quad Prob(-R > VaR_p) \le p \\ &\qquad\qquad \sum_{i=1}^{n} w_i = 1, \quad 0 \le w_i \le 1 \end{aligned} \tag{5}$$

三、 平均數--期望損失值架構

期望損失值定義為當投資組合損失超過 $p\%$信賴水準之風險值時，平均會損失多少：

$$ES_p = E[-R \mid -R > VaR_p], \tag{6}$$

則最適投資組合即為求解下列非線性規劃問題，在可容忍的期望損失水準下，追求預期報酬極大化：

$$
\begin{aligned}
&\underset{W}{Maximize} \;\; W\overline{R}' \\
&subject\ to \;\; E\left[-R \,\middle|\, -R > VaR_p\right] \le ES_p \qquad (7) \\
&\qquad\qquad \sum_{i=1}^{n} w_i = 1, \quad 0 \le w_i \le 1
\end{aligned}
$$

參、風險值與期望損失值衡量

本節將導出三種不同報酬率分配假設下，風險值與期望損失值之衡量公式。

一、 常態分配

假設資產報酬率服從常態分配，會使投資組合配置最適化問題簡化許多，因為平均數—變異數架構下之非線性規劃求解，在於找出能使每單位標準差帶來最大預期報酬率的那個投資組合，亦即，在於找出 Sharpe Ratio 最大的那個投資組合。而在常態分配假設下，風險值與期望損失值皆為標準差之倍數：

$VaR_p = Z_\alpha * \sigma$，

$$ES_p = E\left[-R \middle| -R > VaR_p\right] = \frac{E\left[-R * I_{\{R \le -VaR_p\}}\right]}{p}$$

$$= -\frac{1}{p\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-VaR_p} R * \exp\left(-\frac{R^2}{2\sigma^2}\right) dr = \frac{\exp\left(-Z_p^2/2\right)}{p\sqrt{2\pi}}\sigma, \tag{8}$$

因此，不論是平均數—風險值架構，或者是平均數—期望損失值架構，皆在找出 Sharpe Ratio 最大的那個投資組合，換句話說，三種架構求得之解會完全相同。

二、 實證分配

若不對資產報酬率分配做任何假設，只採用實際分配，則風險值即為第 p 百分位之報酬率觀察值，而期望損失值即為超過風險值之那些報酬率的平均值。因此，平均數—風險值架構，或平均數—期望損失值架構，所求得之最適資產配置將不同於以平均數—變異數架構所求得者。唯實證分配之缺點為，當樣本觀察數不夠多時，風險值與期望損失值之估計將不穩定，亦無法做統計推論。

三、 極值分配

由於金融資產報酬率分配常有厚尾現象，極值分配正可補捉此特性，因此近來常被使用。在此分配假設下，利用門檻法（Peaks over Threshold Method，POT）[1]，則風險值與期望損失值可以下列公式估計出來：

$$VaR_p(R) = u + \frac{\phi}{\varepsilon}\left[\left(p\frac{N}{N_u}\right)^{-\varepsilon} - 1\right], \tag{9}$$

$$ES_p(R) = \frac{VaR_p(R) + \phi - \varepsilon u}{1-\varepsilon}, \tag{10}$$

其中，u 為門檻值，$\phi > 0$ 為規模參數，$\varepsilon > 0$ 為尾部參數，ε 愈大表示分配之尾部愈厚，N 為全體樣本觀察值個數，N_u 為超過門檻值之樣

[1] 關於門檻法之細節，詳見 Embrechts, P., Klüppelberg, C., and Mikosch, T. (1997)。

本觀察值個數。

（一）演算法

放鬆常態分配之假設，使投資組合配置最適化問題複雜許多，因為已無封閉解（closed-form solution）可直接解非線性規劃問題。本研究以下列步驟搜尋出最適投資組合配置：

步驟一：對每項資產產生投資權重，權重介於 0%至 100%間，每個權重間隔 1%，若投資組合有三項資產，則所有可能的權重組合將有 $\binom{100+3-1}{100} = C_{100}^{102} = 5151$ 組。

步驟二：在某一組權重下，計算投資組合報酬率之時間序列，並配適極值分配。

步驟三：根據公式（9）與（10）估計出風險值與期望損失值。

步驟一至步驟三重複做 5151 次。

步驟四：在 5151 個結果中，找出最大報酬率／風險值比率的那一組，即為平均數—風險值架構下之最適投資組合；同理，具有最大報酬率／期望損失值比率的那一組，即為平均數—期望損失值架構下之最適投資組合。

（二）門檻值之選擇

以門檻法估計極值分配參數之關鍵，在於門檻值之選擇，門檻值太

低，會使樣本包含太多非極端觀察值，使得估計參數有偏誤；門檻值太高，又會使樣本數過少，使得估計參數變異大而不穩定。本文參考 Bali (2003) 之方法，將門檻值定義為低於平均數第$-Z_p$個標準差之觀察值，亦即，$u = -Z_p * \sigma + \text{mean}$, 其中$-Z_p$為對應於 p%機率水準之標準常態變量。本文嘗試四個不同的門檻值，-1.282、-1.645、-1.881、-2.33，分別對應於 90%、95%、97%、99%機率水準。

肆、命題

基於第貳節最適化理論與第參節分配估計模型，本節提出四項待驗證命題：

命題一：若假設資產報酬率服從常態分配，則不論是平均數—變異數、平均數—風險值、或平均數—期望損失值架構，所求得之最適投資組合會完全相同。

命題二：若採用實證分配或極值分配，則三種架構所求得之最適投資組合將會不同。

命題三：與以平均數—變異數架構所求得之最適投資組合相比較，以平均數—風險值所求得之最適投資組合，應會將權重多配置於較安全之資產，所謂較安全，係指有正偏態或負偏態較小，峰態亦較小之資產，因此，投資組合之風險值與期望損失值亦較小，但報酬率亦相對較小。

命題四：與以平均數—風險值架構相比，以平均數—期望損失值架構所求得之最適投資組合，會將更多權重配置於安全之資產，因此，投資組合之風險值與期望損失值會更小，報酬率亦相對更小。

伍、資料描述

本文投資組合包含三項資產，S&P 500 股價指數（SPX）、Nasdaq 股價指數（CCMP）、美國長天期債券價格指數（USLGBND），日報酬率資料由 Datastream 取得，樣本期間為 1986/1/3 至 2005/05/13，共 5050 個報酬率。表 1 顯示三項資產報酬率之敘述統計量，S&P 500 股價指數、Nasdaq 股價指數、美國長天期債券價格指數之平均日報酬率分別為 0.034%、0.036%、0.001%，標準差分別為 1.082%、1.431%、0.967%，換算成 Sharpe Ratio 分別為 3.111%、2.496%、0.153%，兩個股價指數報酬率與債券報酬率之相關係數相當低，分別為 0.078 與 0.002，顯示投資組合納入債券會有很好的風險分散效果；根據 Sharpe Ratio，投資人應配置最多的權重於 S&P 500 股價指數，其次為 Nasdaq 股價指數，最少於債券指數；然而三資產之偏態與峰態係數顯著，保守型之投資人應會減少投資於 S&P 500 股價指數，因為其負偏態係數很大，峰態係數亦高，是下方風險最高之資產。

陸、實證結果

一、 傳統平均數--變異數架構下之最適投資組合配置

在傳統平均數--變異數架構下, 投資人追求每單位標準差所帶來的報酬率最大，表 2 Panel A 之 R/σ 欄顯示，最適投資組合配置為：97%於 S&P 500 股價指數，3%於 Nasdaq 股價指數，0%於債券指數，符合根據 Sharpe Ratio 高低之配置結果。

二、 常態分配假設下之最適投資組合配置

如前所述，常態分配假設下，風險值與期望損失值皆為標準差之倍數，表 2 Panel A 之 R/VaR_p 與 R/ES_p 欄顯示，不論是平均數--風險值架構，或是平均數--期望損失值架構，所求得之最適投資組合配置與傳統平均數--變異數架構所得者完全相同, 此結果與 Campbell et al. (2001) 之發現一致，亦驗證了本文之命題一，同時也證明本文之搜尋求解方式並無錯誤。

三、 實證分配下之最適投資組合配置

在平均數--風險值架構下，表 2 Panel B 之 R/VaR_p 欄顯示，各信賴水準下投資於債券之權重增加，因此各信賴水準下最適投資組合報酬

率之標準差、風險值與期望損失值，均較傳統平均數--變異數架構（見 R/σ 欄）所得之配置結果下降。值得注意的是，在 99.5%信賴水準下，投資於 Nasdaq 股價指數之權重增加至 12%，這是因為其負偏態係數最小之故。

在平均數--期望損失值架構下，表 2 Panel B 之 R/ES_p 欄顯示，各信賴水準下投資於債券之權重更為增加，且在 99%與 99.5%信賴水準下，投資於 Nasdaq 股價指數之權重亦更增加至 8%與 21%，因此各信賴水準下最適投資組合報酬率之標準差、風險值與期望損失值更進一步下降。此結果同時驗證了本文之命題二、命題三與命題四。

四、 極值分配假設下之最適投資組合配置

極值分配之優點為其專注於描述報酬率分配之尾部，而非整體分配，正好適合分析下方風險；此外，其不像實證分配有自由度不足之問題。如前所述，配適極值分配於投資組合報酬率之首要關鍵，在於門檻值之選取，門檻值太低將使估計值產生偏誤，門檻值太高又會使估計值變得不穩定，本文嘗試以四種不同門檻值，-1.282、-1.645、-1.881、-2.33，分別為對應 90%、95%、97%、99%之信賴水準，來選取極端報酬率觀察值。表 2 Panels C 至 F 顯示各門檻值下，極值分配配適及最適投資組合決定之結果。

當門檻值設為 90%信賴水準時，極端報酬率觀察值之個數約為 389 個（見表 2 Panel C），當門檻值提高為 95%、97%及 99%信賴水準時，極端報酬率觀察值之個數分別降到約為 217、145 及 77 個(見表 2 Panels D 至 F)。值得注意的是，在 Panel F，當門檻值為 99%信賴水準時，由於樣本觀察值個數太少，所估計出之期望損失值變得不穩定而出現負值；至於其他三種門檻值則配適的不錯，且產生相似之估計結果。以規模參數而言, 在 Panel C, 當門檻值為 90%信賴水準時, 其範圍從 0.538 至 0.6；在 Panel D，當門檻值為 95%信賴水準時，其範圍從 0.489 至 0.606；在 Panel E，當門檻值為 97%信賴水準時，其範圍從 0.54 至 0.658。以尾部參數而言，在 Panel C，當門檻值為 90%信賴水準時，其範圍從 0.2 至 0.23；在 Panel D，當門檻值為 95%信賴水準時，其範圍從 0.238 至 0.345；在 Panel E，當門檻值為 97%信賴水準時，其範圍從 0.272 至 0.347。由各門檻值下之結果比較看來，估計值相當穩定。此外，尾部參數之上、下限範圍隨著門檻值提高而提高，正好反應出愈來愈多中間報酬率觀察值由樣本中剔除之結果。

表 2 Panel E 顯示，當門檻值為 97%信賴水準時，其估計結果與實證分配之估計結果最為相近，換言之，實證分配之估計結果可說是極值分配估計結果的一個特例。因此，以下分析將著重於 Panel E。

在平均數—風險值架構下（見 R/VaR_p 欄），與傳統平均數—變異數

架構（見 R/σ 欄）相較，各信賴水準之最適投資組合皆將權重移往債券；與實證分配之估計結果（Panel B）相較，在信賴水準 97%及以上時，甚至有更多的權重移往債券，因此，各信賴水準下最適投資組合之標準差與風險值，皆較傳統平均數—變異數架構下之最適投資組合下降。值得注意的是，在信賴水準 97%及以上時，配置於 Nasdaq 股價指數的權重降為 0，此與 Nasdaq 股價指數之負偏態在三資產中最小，應多投資的直覺相抵觸，此亦反應出以平均數—風險值架構來決定最適投資組合之矛盾點。

在平均數--期望損失值架構下（見 R/ES_p 欄），在信賴水準 99%及 99.5%時，配置於債券之權重更增加為 12%及 14%，配置於 Nasdaq 股價指數的權重亦增加為 8%及 13%，因此，最適投資組合之標準差、風險值、與期望損失值，皆較傳統平均數—變異數架構、平均數—風險值架構下之最適投資組合下降，且投資組合之偏態與峰態係數亦下降，當然投資組合之報酬率亦有所犧牲。

換言之，當投資人關心下方風險，並以期望損失值來衡量下方風險，及限制所能忍受的水準時，才能確保所求得之最適投資組合配置會較安全保守；反之，以變異數或以風險值來衡量下方風險，並限制所能忍受的水準時，所求得之最適投資組合配置是不夠安全保守的。

柒、結論

本文在不同資產報酬率分配，如，常態、實證、極值分配之假設下，以平均數—變異數、平均數—風險值、平均數—期望損失值架構來尋求最適投資組合配置。發現平均數—期望損失值架構之結果最合理並符合直覺，所決定出之最適投資組合最安全保守；反之，以平均數—變異數、或以平均數—風險值架構所求得之最適投資組合配置是不夠安全保守的。而實證分配架構之結果可說是極值分配架構之特例。

參考文獻

Acerbi, C., Nordio, C., and Sirtori, C. (2001). "Expected shortfall as a tool for financial risk management." Working paper. Abaxbank, Milano, Italy.

Artzner, P., Delbaen, F., Eber, J.M., and Heath, D. (1997). "Thinking coherently." *Risk*, 10 (11), 68-71.

Artzner, P., Delbaen, F., Eber, J.M., and Heath, D. (1999). "Coherent measures of risk." *Mathematical Finance*, 9 (3), 203-228.

Bali, T. G. (2003). "An extreme value approach to estimating volatility and value at risk." *Journal of Business*, 76 (1), 83-108.

Balkema, A., and de Haan, L. (1974). "Residual life time at great age." *Annals of Probability*, 2, 792-804.

Basak, S., and Shapiro, A. (2001). "Value-at-risk-based risk management: optimal policies and asset prices." *The Review of Financial Studies*, 14 (2), 371-405.

Bensalah, Y. (2002). "Asset allocation using extreme value theory." Working Paper. Bank of Canada, Ottawa, Canada.

Campbell, R., Huisman, R., and Koedijk, K. (2001). "Optimal portfolio selection in a value-at-risk framework." *Journal of Banking and Finance*, 25, 1789-1804.

Chan, L., Karceski, J. and Lakonishok, J. (1999), "On portfolio optimization: Forecasting covariances and choosing the risk model", *Review of Financial*

Studies, 12(5), 937-974.

Chopra, V. and Ziemba, W. (1993), “The effect of errors in means, variances and covariances upon optimal portfolio choice”, *Journal of Portfolio Management*, 19(2), 6-11.

Cox, D., and Snell, E. (1968). “A general definition of residuals (with discussion).” *Journal of the Royal Statistical Society*, Series B 30, 248-275.

Danielsson, J., and de Vries, C. G. (1997). “Tail index and quantile estimation with very high frequency data.” *Journal of Empirical Finance*, 4, 241-257.

Embrechts, P., Kl*ü*ppelberg, C., and Mikosch, T. (1997). *Modelling Extremal Events*. Berlin: Springer-Verlag.

Jaschke, S. R. (2001). “Quantile-VaR is the wrong measure to quantify market risk for regulatory purposes.” Working paper. Weierstrab-Institut for Angewandte Analysus und Stochastik, Berlin, Germany.

Krokhmal, P., Palmquist, J., and Uryasev, S. (2001/2002). “Portfolio optimization with conditional value-at-risk objective and constraints.” *Journal of Risk*, 4 (2), 43-68.

Longin, F. M. (1996). “The asymptotic distribution of extreme stock market returns.” *Journal of Business*, 69 (3), 383-408.

Lucas, A., and Klaassen, P. (1998). “Extreme returns, downside risk, and optimal asset allocation.” *The Journal of Portfolio Management*, Fall, 71-79.

Mcneil, A. J., & Frey, R. (2000). “Estimation of tailed-related risk measures for heteroscedastic financial time series: an extreme value approach.” *Journal of Empirical Finance*, 7, 271-300.

Mcneil, A. J., & Saladin, T. (1998). “Developing scenarios for future extreme losses using the POT model.” Working paper. ETH Zentrum, Zurich.

Pickands, J. (1975). “Statistical inference using extreme order statistics.” *The Annals of Statistics*, 3, 119-131.

Rockafellar, R. T., and Uryasev, S. (2000). “Optimization of conditional value-at-risk.” *Journal of Risk*, 2 (3), 21-41.

Uryasev, S. (2000). “Conditional value-at-risk: optimization algorithms and applications.” *Financial Engineering News*, 14.

Table 1. Summary Statistics – Full Sample Period: 1986/01/03 ~ 2005/05/13

	SPX	**CCMP**	**USLGBND**
R (%)	0.034	0.036	0.001
σ (%)	1.082	1.431	0.967
R/σ (%)	3.111	2.496	0.153
Skewness	-2.083	-0.234	-0.946
Kurtosis	47.369	11.252	101.976
Jarque-Bera (Prob.)	417712 (0.00)	14370 (0.00)	2061232 (0.00)
Minimum	-22.90 (87/10/19)	-12.05 (87/10/22)	-21.16 (86/05/12)
Correlation Matrix	SPX	CCMP	USLGBND
SPX	1		
CCMP	0.787	1	
USLGBND	0.078	0.002	1

Key

SPX = S&P500 Composite Price Index

CCMP = Nasdaq Composite Price Index

USLGBND = U.S. Long Bond Price Index

Table 2. Optimized Portfolio

Panel A. Normal Distribution

Max	R / σ	R / VaR_p $VaR_p = -Z_p{*}\sigma + R$				R / ES_p $ES_p = -k{*}Z_p{*}\sigma + R$			
		95	97	99	995	95	97	99	995
w (%)									
SPX	97	97	97	97	97	97	97	97	97
CCMP	3	3	3	3	3	3	3	3	3
USLGBND	0	0	0	0	0	0	0	0	0
R/σ (%)	3.112	3.112	3.112	3.112	3.112	3.112	3.112	3.112	3.112
R (%)	0.034	0.034	0.034	0.034	0.034	0.034	0.034	0.034	0.034
σ (%)	1.084	1.084	1.084	1.084	1.084	1.084	1.084	1.084	1.084
Skew	-1.998	-1.998	-1.998	-1.998	-1.998	-1.998	-1.998	-1.998	-1.998
Kurt	44.91	44.91	44.91	44.91	44.91	44.91	44.91	44.91	44.91
VaR (%)									
95	1.749	1.749	1.749	1.749	1.749	1.749	1.749	1.749	1.749
97	2.004	2.004	2.004	2.004	2.004	2.004	2.004	2.004	2.004
99	2.487	2.487	2.487	2.487	2.487	2.487	2.487	2.487	2.487
995	2.757	2.757	2.757	2.757	2.757	2.757	2.757	2.757	2.757
Ave. △%		**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**
ES (%)									
95	2.202	2.202	2.202	2.202	2.202	2.202	2.202	2.202	2.202
97	2.424	2.424	2.424	2.424	2.424	2.424	2.424	2.424	2.424
99	2.854	2.854	2.854	2.854	2.854	2.854	2.854	2.854	2.854
995	3.1	3.1	3.1	3.1	3.1	3.1	3.1	3.1	3.1
Ave. △%		**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**
Nobs									
95	217	217	217	217	217	217	217	217	217
97	145	145	145	145	145	145	145	145	145
99	77	77	77	77	77	77	77	77	77
995	49	49	49	49	49	49	49	49	49

Key: R = return; σ = volatility; VaR_p = value-at-risk at probability *p*; ES_p = expected shortfall at probability *p*. Ave. △%: The figure indicates the average of the percentage differences of the normal VaR value from the traditional VaR value at a given confidence level, and the average of the percentage differences of the normal ES value from the traditional ES value at a given confidence level.

Panel B. Historical Distribution

Max	R / σ	R / VaR_p $VaR_p = p$th-quantile of return distribution				R / ES_p $ES_p = E[-R\| -R > VaR_p]$			
		95	97	99	995	95	97	99	995
w (%)									
SPX	97	95	98	97	83	94	92	80	65
CCMP	3	0	1	2	12	0	0	8	21
USLGBND	0	5	1	1	5	6	8	12	14
R/σ (%)	3.112	3.103	3.111	3.111	3.097	3.101	3.095	3.078	3.034
R (%)	0.034	0.032	0.033	0.033	0.032	0.032	0.031	0.03	0.03
σ (%)	1.084	1.033	1.072	1.073	1.043	1.023	1.004	0.973	0.975
Skew	-1.998	-1.995	-2.039	-2.011	-1.649	-1.975	-1.933	-1.61	-1.188
Kurt	44.91	45.09	46.13	45.31	35.63	44.57	43.48	34.81	24.92
VaR (%)									
95	1.659	1.561	1.635	1.648	1.616	1.548	1.536	1.506	1.532
97	1.971	1.866	1.936	1.947	1.946	1.847	1.82	1.82	1.861
99	2.754	2.62	2.728	2.713	2.716	2.585	2.533	2.487	2.552
995	3.429	3.234	3.402	3.393	3.197	3.19	3.138	3.062	3.063
Ave. △%		**-5.45**	**-1.24**	**-1.10**	**-3.00**	**-6.52**	**-7.90**	**-9.32**	**-7.81**
ES (%)									
95	2.505	2.374	2.474	2.477	2.42	2.35	2.304	2.244	2.273
97	2.976	2.82	2.94	2.943	2.868	2.791	2.733	2.654	2.673
99	4.301	4.073	4.254	4.254	4.088	4.028	3.938	3.763	3.751
995	5.614	5.314	5.559	5.556	5.286	5.252	5.128	4.864	4.748
Ave. △%		**-5.28**	**-1.13**	**-1.09**	**-4.45**	**-6.30**	**-8.32**	**-11.78**	**-11.91**
Nobs									
95	251	251	251	251	251	251	251	251	251
97	150	150	150	150	150	150	150	150	150
99	49	49	49	49	49	49	49	49	49
995	24	24	24	24	24	24	24	24	24

Key: R = return; σ = volatility; VaR_p = value-at-risk at probability p; ES_p = expected shortfall at probability p. Ave. △%: The figure indicates the average of the percentage differences of the empirical VaR value from the traditional VaR value at a given confidence level, and the average of the percentage differences of the empirical ES value from the traditional ES value at a given confidence level.

Panel C. EVT Distribution (90% Threshold)

Max	R / σ	R / VaR_p $VaR_p = u + (\phi/\varepsilon)\left[(p\,N/N_u)^{-\varepsilon} - 1\right]$				R / ES_p $ES_p = (VaR_p + \phi - \varepsilon u)/(1-\varepsilon)$			
		95	97	99	995	95	97	99	995
w (%)									
SPX	97	100	99	92	92	97	92	88	84
CCMP	3	0	0	0	0	0	0	3	8
USLGBND	0	0	1	8	8	3	8	9	8
R/σ (%)	3.11	3.11	3.11	3.10	3.10	3.11	3.10	3.09	3.09
R (%)	0.034	0.034	0.033	0.031	0.031	0.033	0.031	0.031	0.031
σ (%)	1.084	1.082	1.072	1.004	1.004	1.052	1.004	0.997	1.01
Skew	-1.999	-2.083	-2.067	-1.933	-1.933	-2.033	-1.933	-1.826	-1.704
Kurt	44.91	47.37	46.96	43.48	43.48	46.06	43.48	40.48	37.11
VaR (%)									
95	1.63	1.62	1.60	1.51	1.51	1.57	1.51	1.50	1.53
97	1.99	1.97	1.95	1.83	1.83	1.92	1.83	1.83	1.87
99	2.91	2.90	2.86	2.67	2.67	2.81	2.67	2.67	2.72
995	3.62	3.61	3.57	3.31	3.31	3.50	3.31	3.30	3.36
Ave. △%		**-0.52**	**-1.52**	**-8.05**	**-8.05**	**-3.41**	**-8.05**	**-8.19**	**-6.33**
ES (%)									
95	2.48	2.47	2.44	2.28	2.28	2.40	2.28	2.27	2.31
97	2.94	2.93	2.90	2.70	2.70	2.84	2.70	2.69	2.73
99	4.13	4.12	4.08	3.79	3.79	4.00	3.79	3.74	3.80
995	5.04	5.04	5.00	4.63	4.63	4.89	4.63	4.55	4.60
Ave. △%		**-0.24**	**-1.23**	**-8.23**	**-8.23**	**-3.27**	**-8.23**	**-9.07**	**-7.61**
GOF-test									
u	-1.355	-1.353	-1.34	-1.256	-1.256	-1.316	-1.256	-1.246	-1.263
Nobs	389	383	385	392	392	385	392	390	396
ϕ	0.6	0.6	0.589	0.538	0.538	0.578	0.538	0.557	0.571
ε	0.224	0.226	0.229	0.23	0.23	0.227	0.23	0.208	0.2
KS stat.	0.033	0.036	0.035	0.037	0.037	0.037	0.037	0.043	0.052

Key: R = return; σ = volatility; VaR_p = value-at-risk at probability p; ES_p = expected shortfall at probability p. Ave. △%: The figure indicates the average of the percentage differences of the EVT VaR value from the traditional VaR value at a given confidence level, and the average of the percentage differences of the EVT ES value from the traditional ES value at a given confidence level.

Panel D. EVT Distribution (95% Threshold)

Max	R/σ	R/VaR_p $VaR_p = u + (\phi/\varepsilon)\left[(p\,N/N_u)^{-\varepsilon} - 1\right]$				R/ES_p $ES_p = (VaR_p + \phi - \varepsilon u)/(1-\varepsilon)$			
		95	97	99	995	95	97	99	995
w (%)									
SPX	97	98	100	95	90	93	92	83	66
CCMP	3	2	0	0	0	0	0	6	21
USLGBND	0	0	0	5	10	7	8	11	13
R/σ (%)	3.11	3.11	3.11	3.10	3.09	3.10	3.10	3.09	3.04
R (%)	0.034	0.034	0.034	0.032	0.03	0.031	0.031	0.03	0.03
σ (%)	1.084	1.083	1.082	1.033	0.986	1.014	1.004	0.98	0.984
Skew	-1.999	-2.027	-2.083	-1.995	-1.887	-1.955	-1.933	-1.693	-1.212
Kurt	44.91	45.73	47.37	45.09	42.31	44.04	43.48	36.94	25.45
VaR (%)									
95	1.66	1.65	1.66	1.60	1.53	1.55	1.54	1.51	1.54
97	1.97	1.97	1.96	1.87	1.79	1.84	1.82	1.79	1.85
99	2.84	2.84	2.81	2.66	2.53	2.63	2.60	2.56	2.63
995	3.56	3.56	3.53	3.34	3.17	3.29	3.25	3.19	3.25
Ave. △%		**-0.20**	**-0.52**	**-5.30**	**-9.69**	**-7.18**	**-8.07**	**-9.60**	**-7.37**
ES (%)									
95	2.48	2.47	2.47	2.35	2.24	2.30	2.28	2.23	2.27
97	2.93	2.93	2.92	2.78	2.64	2.72	2.69	2.63	2.67
99	4.17	4.17	4.18	3.98	3.77	3.88	3.83	3.71	3.71
995	5.21	5.19	5.24	5.01	4.73	4.85	4.79	4.60	4.51
Ave. △%		**-0.19**	**0.06**	**-4.63**	**-9.57**	**-7.07**	**-8.11**	**-10.70**	**-10.41**
GOF-test									
u	-1.749	-1.748	-1.746	-1.667	-1.591	-1.636	-1.621	-1.582	-1.588
Nobs	217	214	217	220	222	215	215	220	233
ϕ	0.593	0.606	0.572	0.52	0.489	0.537	0.533	0.533	0.567
ε	0.306	0.298	0.326	0.345	0.342	0.319	0.316	0.291	0.238
KS stat.	0.055	0.048	0.051	0.053	0.052	0.046	0.051	0.074	0.063

Key: R = return; σ = volatility; VaR_p = value-at-risk at probability p; ES_p = expected shortfall at probability p. Ave. △%: The figure indicates the average of the percentage differences of the EVT VaR value from the traditional VaR value at a given confidence level, and the average of the percentage differences of the EVT ES value from the traditional ES value at a given confidence level.

Panel E. EVT Distribution (97% Threshold)

Max	R / σ	R / VaR_p $VaR_p = u + (\phi/\varepsilon)[(p\,N/N_u)^{-\varepsilon} - 1]$				R / ES_p $ES_p = (VaR_p + \phi - \varepsilon u)/(1-\varepsilon)$			
		95	97	99	995	95	97	99	995
w (%)									
SPX	97	91	96	92	89	96	96	80	73
CCMP	3	5	0	0	0	0	0	8	13
USLGBND	0	4	4	8	11	4	4	12	14
R/σ (%)	3.11	3.11	3.11	3.10	3.08	3.11	3.11	3.08	3.06
R (%)	0.034	0.032	0.032	0.031	0.03	0.032	0.032	0.03	0.029
σ (%)	1.084	1.045	1.042	1.004	0.977	1.042	1.042	0.973	0.962
Skew	-1.999	-1.872	-2.014	-1.933	-1.863	-2.014	-2.014	-1.61	-1.415
Kurt	44.91	41.52	45.59	43.48	41.70	45.59	45.59	34.81	30.02
VaR (%)									
95	1.67	1.59	1.59	1.57	1.54	1.59	1.59	1.54	1.51
97	1.98	1.90	1.89	1.84	1.80	1.89	1.89	1.81	1.79
99	2.83	2.74	2.71	2.59	2.51	2.71	2.71	2.54	2.54
995	3.55	3.43	3.40	3.23	3.13	3.40	3.40	3.14	3.14
Ave. △%		**-3.71**	**-4.40**	**-7.56**	**-9.95**	**-4.40**	**-4.40**	**-9.47**	**-10.23**
ES (%)									
95	2.48	2.38	2.37	2.29	2.23	2.37	2.37	2.23	2.21
97	2.93	2.82	2.80	2.69	2.62	2.80	2.80	2.62	2.59
99	4.18	4.01	4.00	3.83	3.71	4.00	4.00	3.67	3.62
995	5.22	4.99	5.00	4.81	4.65	5.00	5.00	4.55	4.45
Ave. △%		**-4.05**	**-4.31**	**-7.95**	**-10.72**	**-4.31**	**-4.31**	**-11.40**	**-12.69**
GOF-test									
u	-2.004	-1.934	-1.928	-1.858	-1.807	-1.928	-1.928	-1.801	-1.779
Nobs	145	144	142	146	148	142	142	153	154
ϕ	0.661	0.658	0.642	0.571	0.54	0.642	0.642	0.557	0.581
ε	0.316	0.294	0.313	0.342	0.347	0.313	0.313	0.309	0.272
KS stat.	0.084	0.096	0.084	0.07	0.066	0.084	0.084	0.093	0.081

Key: R = return; σ = volatility; VaR_p = value-at-risk at probability p; ES_p = expected shortfall at probability p. Ave. △%: The figure indicates the average of the percentage differences of the EVT VaR value from the traditional VaR value at a given confidence level, and the average of the percentage differences of the EVT ES value from the traditional ES value at a given confidence level.

Panel F. EVT Distribution (99% Threshold)

Max	R/σ	R/VaR_p $VaR_p = u + (\phi/\varepsilon)[(pN/N_u)^{-\varepsilon} - 1]$				R/ES_p $ES_p = (VaR_p + \phi - \varepsilon u)/(1-\varepsilon)$			
		95	97	99	995	95	97	99	995
w (%)									
SPX	97	58	58	91	90	11	16	72	66
CCMP	3	3	3	1	2	12	9	16	19
USLGBND	0	39	39	8	8	77	75	12	15
R/sd (%)	3.11	2.70	2.70	3.10	3.10	1.14	1.23	3.06	3.04
R (%)	0.034	0.021	0.021	0.031	0.031	0.009	0.01	0.03	0.029
sd (%)	1.084	0.785	0.785	1.005	1.005	0.803	0.792	0.984	0.963
Skew	-1.999	-0.854	-0.854	-1.905	-1.877	-0.692	-0.66	-1.378	-1.218
Kurt	44.91	22.60	22.60	42.67	41.85	79.39	75.80	29.14	25.57
VaR (%)									
95	1.98	0.88	0.88	1.97	1.99	1.51	1.53	1.64	1.59
97	2.16	1.16	1.16	2.09	2.10	1.56	1.57	1.86	1.82
99	2.76	1.93	1.93	2.53	2.53	1.83	1.82	2.52	2.48
995	3.37	2.58	2.58	3.03	3.03	2.25	2.22	3.11	3.06
Ave. △%		**-38.97**	**-38.97**	**-5.52**	**-5.18**	**-29.70**	**-29.62**	**-11.89**	**-13.73**
ES (%)									
95	2.65	1.61	1.61	2.57	2.59	0.14	0.69	2.29	2.23
97	3.04	2.01	2.01	2.93	2.95	-0.78	0.13	2.66	2.60
99	4.35	3.14	3.14	4.29	4.34	-5.64	-2.92	3.75	3.65
995	5.69	4.06	4.06	5.84	5.95	-13.27	-7.81	4.73	4.58
Ave. △%		**-32.36**	**-32.36**	**-1.42**	**-0.23**	**-195.8**	**-143.5**	**-14.22**	**-16.46**
GOF-test									
u	-2.487	-1.806	-1.806	-2.306	-2.307	-1.858	-1.833	-2.258	-2.21
Nobs	77	59	59	80	81	47	49	74	75
ϕ	0.578	0.793	0.793	0.417	0.404	0.442	0.4	0.637	0.633
ε	0.544	0.308	0.308	0.676	0.691	1.055	1.082	0.396	0.373
KS stat.	0.047	0.066	0.066	0.048	0.049	0.08	0.093	0.069	0.066

Key: R = return; σ = volatility; VaR_p = value-at-risk at probability *p*; ES_p = expected shortfall at probability *p*. Ave. △%: The figure indicates the average of the percentage differences of the EVT VaR value from the traditional VaR value at a given confidence level, and the average of the percentage differences of the EVT ES value from the traditional ES value at a given confidence level.