行政院及所屬機關出國報告

（出國類別 :其他）

二〇〇三年第44屆
國際數學奧林匹亞競賽參賽報告

服務機關：中央研究院統計科學研究所
出國人職稱 ：教授
姓　　名：傅承德
出國地區：日本
出國期間：92年6月28日-92年7月19日
報告日期：92年9月30日

系統識別號:C09300450

公 務 出 國 報 告 提 要

頁數: 60　含附件: 否

報告名稱:

參加2003年國際數學奧林匹亞競賽

主辦機關:

教育部

聯絡人／電話:

馬淑珍／23565907

出國人員:

傅承德　中央研究院　統計所　研究員
左太政　國立高雄師範大學　數學系　教授
趙民德　中央研究院　統計所　研究員
洪文良　國立新竹師範學院　數學教育系　副教授
林金毅　學生
黃紹倫　學生
黃道生　學生
趙心宇　學生
廖紹棠　學生
葉仲恆　學生

出國類別: 其他

出國地區: 日本

出國期間: 民國 92 年 06 月 28 日 -民國 92 年 07 月 19 日

報告日期: 民國 92 年 09 月 日

分類號/目: I1／數學　I1／數學

關鍵詞: 國際數學奧林匹亞競賽

內容摘要: 第四十四屆國際數學奧林匹亞競賽由日本主辦，於2003年7月2日至19日於東京舉行，共有八十二個國家參賽，我國六位參賽學生獲得一金二銀二銅一榮譽成績，國際排名第十六名。

本文電子檔已上傳至出國報告資訊網

摘　要

我國今年參加於日本東京舉行的第四十四屆國際數學奧林匹亞競賽；中央研究院統計科學研究所接受教育部委託，辦理「中民國參加二OO三年亞太數學暨國際數學奧林匹亞競賽計畫」。

今年受 SARS 疫情影響，主辦國日本以 WHO 於六月二十日是否將我國列為 SARS 感染疫區以決定我代表團是否應提前至該國或其他非感染區進行隔離觀察十日。雖經我方積極向主辦單位爭取希在我國無疫情地區自行隔離，惟未為主辦單位接受，並於六月十九日通知我代表團需進行隔離。基於尊重主辦國之立場，並考量隔離期間所有成員各費用之經濟效益，及延續國手集訓工作，故選擇至日本隔離觀察，並配合主辦單位需要分兩梯次出發。

這次我國代表團成員共 10 人，第一梯次由領隊傅承德教授及觀察員趙民德教授所組成，於六月二十八日早上由台北出發，於當日下午抵達日本成田機場，再搭車前往飯店以進行隔離觀察。第二梯次由副領隊左太政教授及觀察員洪文良教授及六位國手：林金毅、趙心宇、黃紹倫、黃道生、廖紹棠、葉仲恆所組成，於七月一日早上由台北出發，當日下午抵達日本成田機場，到達機場之後再由台北駐日經濟文化代表處文化組黃冠超先生帶領代表團前往飯店以進行隔離觀察。

今年國際數學奧林匹亞競賽共有 82 個國家參加，合計有 457 位學生代表參加競賽。總分前二十名的國家依次為：保加利亞、中國大陸、美國、越南、俄羅斯、韓國、羅馬尼亞、土耳其、日本、匈牙利、英國、加拿大、哈薩克、烏克蘭、印度、台灣、德國、伊朗、泰國、白俄羅斯。我國今年共計獲得一面金牌、二面銀牌、二面銅牌及一榮譽獎，名列第十六名。其中黃紹倫獲得 29 分、葉仲恆獲得 21 分、黃道生獲得 20 分、趙心宇獲得 18 分、林金毅獲得 17 分、廖紹棠獲得 9 分，總分為 114 分，而葉仲恆係國中三年級應屆畢業生，為我國參加國際奧林匹亞各學科競賽以來，第一位非以高中學生身份參賽。葉生在 82 個參賽國 457 選手與賽的競賽中獲得銀牌的佳績。

本報告共四個部分，第一章為本屆國際數學奧林匹亞競賽紀實、第二章為本屆試題內容評析與參考解答、第三章為領隊工作報告、以及第四章參賽學生心得報告，供國內相關學者、數學教師等輔導數學資優生之研究、應用之參考。

目　錄

第一章

2003 年第 44 屆國際數學奧林匹亞競賽紀實

我國今年參加在日本東京主辦 2003 年第 44 屆國際數學奧林匹亞競賽(IMO)，共計獲得一面金牌、二面銀牌及二面銅牌，在 82 隊中名列第十六名。今年國際數學奧林匹亞競賽共有 82 個國家參加，合計有 457 位學生代表參加競賽。總分前二十名的國家依次為：保加利亞、中國大陸、美國、越南、俄羅斯、韓國、羅馬尼亞、土耳其、日本、匈牙利、英國、加拿大、哈薩克、烏克蘭、印度、台灣、德國、伊朗、泰國、白俄羅斯。

今年代表團受 SARS 疫情影響，主辦國日本以 WHO 於六月二十日是否將我國列為 SARS 感染疫區以決定我代表團是否應提前至該國或其他非感染區進行隔離觀察十日。其間雖經我方積極向主辦單位爭取希望能在我國無疫情地區自行隔離，惟未為主辦單位接受，並於六月十九日通知我代表團需進行隔離觀察。基於尊重主辦國之立場，同時考量隔離期間所有成員交通食宿生活費用之經濟效益，以及國手集訓工作之延續，選擇至日本隔離觀察，並配合主辦單位需要分兩梯次出發。第一梯次由領隊傅承德教授及觀察員趙民德教授所組成，於六月二十八日早上由台北出發，於當日下午抵達日本成田機場，再搭車前往飯店以進行隔離觀察。第二梯次由副領隊左太政教授及觀察員洪文良教授及六位國手：林金毅（建國中學)、趙心宇（建國中學)、黃紹倫（建國中學)、黃道生（建國中學)、廖紹棠（高雄中學)、葉仲恆（鳳西國中）所組成，於七月一日早上由台北出發，於當日下午抵達日本成田機場，到達機場之後再由台北駐日經濟文化代表處文化組黃冠超先生帶領代表團前往飯店以進行隔離觀察。

本屆國手葉仲恆同學係國中三年級應屆畢業生，為我國參加國際奧林匹亞各學科競賽以來，第一位非以高中學生身份參賽，該生原係候補國手第二順位，因主辦單位要求我代表團需提前至非 SARS 疫區隔離觀察十日，原其中一位正選國手係高三應屆畢業生為參加大學指定科目考試，因此放棄參賽，後補國手第一順位學生亦早已放棄參賽，故依序遞補候補國手第二順位葉生參賽。

葉生參加國際奧林匹亞培訓係按「中華民國參加 2003 年亞太數學奧林匹亞研習營簡章」參、研習資格第四點規定：數學表現優異，獲得中華民國國際數學數理及資訊奧林匹亞指導委員會數學工作小組二位委員黃文璋、陳兆年教授推薦參加研習，其後於亞太數學奧林匹亞競賽表現優異（獲得第十一名)，依 2003 年中華民國國際數學奧林匹亞選訓簡章第一之 3 規定：續獲上開工作小組推薦參加國際數學奧林匹亞選訓，並以第八名成績排於候補國手第二順位完成結訓。由於亞太數學及國

際數學奧林匹亞競賽對於參賽選手資格僅規定年齡需在二十歲以下，尚未進入大學註冊，並未排除國中生參賽，我國以往雖未選派國中階段之選手與賽，惟其他國家則不乏先例，亦有年僅十三歲之選手與賽。鑑於葉生係經上述遴選程序選定之候補國手，且符合國際數學奧林匹亞競賽規定，因此由葉生遞補參賽，在 82 個參賽國 457 選手與賽的國際數學競賽中獲得銀牌的佳績。

一、前言

為了發掘與培育科學資優學生並激發其潛能，同時也希望向國際社會展示我國科學教育的成果，教育部與國科會極力支持學生參加國際性科學競賽。今年七月在日本東京所舉行 2003 年第 44 屆國際數學奧林匹亞競賽，我國因受 SARS 疫情影響共計獲得一面金牌、二面銀牌及二面銅牌，在 82 隊中名列第十六名。由於我代表團出國期間已達二十餘日，代表團成員均已歸國心切，因此在七月十九日競賽結束後隨即返國，未再安排後續文教參訪行程。

二、代表團組織成員

這次我國代表團成員共 10 人，代表團的主要工作有二項：(一) 參加本屆國際數學奧林匹亞競賽活動；(二) 促進國際友誼與交流。底下是本屆代表團成員名單及任務分配表：

職務	姓名	性別	服務機關(就讀學校)	職稱	職責
領隊	傅承德	男	中央研究院統計科學研究所	研究員	1、負責代表團國內、外之聯絡，蒐集觀察政府支援 2003IMO 實務運作。 2、代表中華民國參加 2003APMO 年會，負責參賽聯繫協調業務。 3、入闈選題、翻譯試題；閱卷評分及協調成績
副領隊	左太政	男	國立高雄師範大學數學系	教授	1、輔導學生生活起居，帶領學生代表。 2、協助評閱試卷及協調成績。
觀察員	趙民德	男	中央研究院統計科學研究所	研究員	協助領隊入闈選題、翻譯試題及評閱試卷
觀察員	洪文良	男	國立新竹師範學院數學教育系	副教授	輔導學生生活起居及蒐集研究數學競試資料
隊員	林金毅	男	台北市立建國高級中學	學生	參加比賽
隊員	黃紹倫	男	台北市立建國高級中學	學生	參加比賽
隊員	黃道生	男	台北市立建國高級中學	學生	參加比賽
隊員	趙心宇	男	台北市立建國高級中學	學生	參加比賽
隊員	廖紹棠	男	高雄市立高雄高級中學	學生	參加比賽
隊員	葉仲恆	男	高雄縣立鳳西國民中學	學生	參加比賽

三、參賽活動概要

(一) 評審會議：

由領隊傅承德教授代表參加，觀察員趙民德教授列席協助，主要內容是討論競賽規則、選題與翻譯試題、確定給分標準及得獎標準。

（二）開畢幕典禮：

1、 開幕典禮：七月十二日下午 2:00 在日本東京都涉谷區的 National Olympics Youth Center Arts Building 舉行。

2、 閉幕典禮：七月十八日下午 2:00 在日本東京都涉谷區的涉谷公會堂舉行，日本皇太子蒞臨致祝賀詞，典禮中並播放本屆 IMO 學生代表部分活動紀錄影片及交由希臘主辦下一屆 IMO 的旗幟交接典禮。

（三）競賽活動：

第一天：七月十三日 9:00~13:30 前三道試題（第 1、2、3 題）

第二天：七月十四日 9:00~13:30 後三道試題（第 4、5、6 題）

（四）評分與協調成績：

由正副領隊傅承德教授、左太政教授及觀察員趙民德教授等負責閱卷，初評後再由正副領隊於七月十五、十六日兩天內依協調委員會訂定的評分標準，逐題與協調員共同評出成績，並由大會將協調結果成績逐題公布於會場。

（五）確定得獎標準：

在七月十六日最後一場評審會議中，各國領隊終於在晚上十點表決通過本屆 IMO 之得獎標準如下：

1、 得獎牌的學生人數以不超過本屆全部參賽學生人數的一半為原則。

2、 得獎牌（金、銀、銅）的學生人數比約為 1:2:3。

3、 本屆金、銀、銅牌得獎學生人數分別為 37、69、104，共 210 位學生獲得獎牌。

4、 本屆獲得六道題目滿分共 42 分的學生有 3 名（中國大陸 1 名，越南 2 名），得金、銀、銅牌的標準各在 29 分、19 分及 13 分以上者。

（六）參觀活動：

主辦單位於七月十五日租下 National Olympics Youth Center 的育樂設施（游泳池、網球場、桌球室等等），全體學生趁此機會享受這些育樂設施並於國際交流廳與各國學生代表聯誼。七月十六日由輔導員古曉融帶領學生參觀東京市區。七月十七日主辦單位安排領隊、副領隊及觀察員參觀橫濱、鐮倉，並安排參賽學生遊玩東京迪斯奈樂園。於七月十八日下午 2:00 在日本東京都涉谷區的涉谷公會堂舉行閉幕頒獎典禮，當日晚間主辦單位在新宿京王大飯店設宴款待各國參賽人員。代表團於七月十九日返抵國門，圓滿完成任務。

中華民國參加 2003 年第 44 屆國際數學奧林匹亞競賽代表團行程表

日期	星期	領隊（含觀察員 A）	副領隊（含觀察員 B）	競賽學生
6 月 28 日	六	領隊及觀察員 A 早上搭機至日本隔離觀察。		
7 月 1 日	二	資料蒐集研究	副領隊、觀察員 B 及競賽學生早上搭機至日本隔離觀察。	
7 月 2 日	三	培訓活動及資料蒐集研究	培訓活動及資料蒐集研究	模擬測驗 I
7 月 3 日	四	培訓活動及資料蒐集研究	培訓活動及資料蒐集研究	模擬測驗 I
7 月 7 日	一	7 日下午抵達 National Olympics Youth Center 辦理報到註冊。	培訓活動及資料蒐集研究	模擬測驗 II
7 月 8 日	二	研究預選試題及評列試題的難易度	培訓活動及資料蒐集研究	模擬測驗 II
7 月 9 日	三	進行選題會議票選出第三、第六兩道最難題目。	資料蒐集研究	準備考試
7 月 10 日	四	進行選題會議票選出第一、第二、第四、第五四道題目並確認英、法、德、俄文試題版本：各國翻譯製作試題。	資料蒐集研究	準備考試
7 月 11 日	五	翻譯製作試題並確認各參賽國語文試題。	下午 1:30 由台北駐日經濟文化代表處文化組黃冠超先生帶領副領隊及觀察員 B、競賽學生抵達 National Olympics Youth Center 辦理報到註冊。	
7 月 12 日	六	開幕典禮	開幕典禮	
7 月 13 日	日	上午參加第一天競賽學生問題解釋會議，晚上開始閱卷。	與各國副領隊交換紀念品。	第一天競賽
7 月 14 日	一	上午參加第二天競賽學生問題解釋會議，晚上開始閱卷。	與各國副領隊交換紀念品。晚上開始閱卷	第二天競賽
7 月 15 日	二	協調成績	同左	在奧林匹亞中心活動並與各國選手聯誼
7 月 16 日	三	協調成績，晚上參加評審會議確定成績與得獎標準。	同左	參觀東京市區
7 月 17 日	四	參觀橫濱、鐮倉	同左	遊玩東京迪斯奈樂園
7 月 18 日	五	上午自由活動：下午參加閉幕頒獎典禮：晚間參加惜別晚宴。	同左	閉幕頒獎典禮
7 月 19 日	六	返抵國門		

四、我國選手成績及得獎統計

我國參加 2003 年國際數學奧林匹亞競賽，六位學生代表各題成績及獲獎類別表：

姓 名	第 1 題	第 2 題	第 3 題	第 4 題	第 5 題	第 6 題	總 分
黃紹倫	7	7	0	7	7	1	29
葉仲恆	7	3	0	7	4	0	21
黃道生	2	3	0	7	7	1	20
趙心宇	7	3	0	7	1	0	18
林金毅	7	3	0	7	0	0	17
廖紹棠	2	0	0	0	7	0	9
總 分	32	19	0	35	26	2	114

五、參加各國成績及得獎名次統計

根據主辦單位的統計資料，依給獎標準統計前 20 名國家的成績、獎牌及名次如下：

名 次	國 名	總分	金牌	銀牌	銅牌	參賽人數
1	BUL 保加利亞	227	6	0	0	6
2	CHN 中國大陸	211	5	1	0	6
3	USA 美國	188	4	2	0	6
4	VIN 越南	172	2	3	1	6
5	RUS 俄羅斯	167	3	2	1	6
6	KOR 南韓	157	2	4	0	6
7	ROM 羅馬尼亞	143	1	4	1	6
8	TUR 土耳其	133	1	3	1	6
9	JAP 日本	131	1	3	2	6
10	UNK 英國	128	1	2	3	6
10	HUN 匈牙利	128	1	3	1	6
12	CAN 加拿大	119	2	0	3	6
12	KAZ 哈薩克	119	1	2	2	6
14	UKR 烏克蘭	118	1	2	3	6
15	IND 印度	115	0	4	1	6
16	TWN 台灣	114	1	2	2	6
17	GER 德國	112	1	2	1	6
18	IRA 伊朗	112	0	3	2	6
19	THA 泰國	111	1	1	3	6
20	BLA 白俄羅斯	111	1	2	2	6

下表是 2003 年第 44 屆國際數學奧林匹亞競賽、全部參賽 82 個國家的成績、參賽人數、獎牌及名次統計表：

名次	國 名	總分	金牌	銀牌	銅牌	參賽人數
1	BUL 保加利亞	227	6	0	0	6
2	CHN 中國大陸	211	5	1	0	6
3	USA 美國	188	4	2	0	6
4	VIN 越南	172	2	3	1	6
5	RUS 俄羅斯	167	3	2	1	6
6	KOR 南韓	157	2	4	0	6
7	ROM 羅馬尼亞	143	1	4	1	6
8	TUR 土耳其	133	1	3	1	6
9	JAP 日本	131	1	3	2	6
10	UNK 英國	128	1	2	3	6
10	HUN 匈牙利	128	1	3	1	6
12	CAN 加拿大	119	2	0	3	6
12	KAZ 哈薩克	119	1	2	2	6
14	UKR 烏克蘭	118	1	2	3	6
15	IND 印度	115	0	4	1	6
16	TWN 台灣	114	1	2	2	6
17	GER 德國	112	1	2	1	6
18	IRA 伊朗	112	0	3	2	6
19	THA 泰國	111	1	1	3	6
20	BLA 白俄羅斯	111	1	2	2	6
21	ISA 以色列	103	0	2	3	5
22	POL 波蘭	102	1	2	0	6
23	SRB 塞爾維亞	101	0	3	1	6
24	FRA 法國	95	0	2	2	6
25	MON 蒙古	93	0	1	3	6
26	AUS 澳洲	92	0	2	2	6
26	BRA 巴西	92	0	1	3	6
28	ARG 阿根廷	91	1	1	2	6
28	HKG 香港	91	0	2	2	6
30	HEL 希臘	88	0	1	4	6
30	MLD 摩達維亞	88	0	1	2	6

32	GEO 喬治亞共和國	86	0	1	2	6
33	CRO 克羅埃西亞	80	0	0	3	6
34	CZE 捷克	79	0	1	2	6
35	SVK 斯洛伐克	77	0	0	4	6
36	SIN 新加坡	71	0	0	2	6
37	BEL 比利時	70	0	1	1	6
37	INA 印尼	70	0	0	2	6
39	COL 哥倫比亞	67	0	0	3	6
40	AZB 亞賽拜然	66	0	1	1	6
41	MEX 墨西哥	64	0	0	3	6
42	NOR 挪威	62	0	1	0	6
43	ARM 亞美尼亞	61	0	0	3	6
43	BIH 波士尼亞	61	0	0	2	6
45	SAF 南非	60	0	0	3	6
46	ESP 西班牙	59	0	0	1	6
47	MAK 馬其頓	54	0	0	2	6
48	SWE 瑞典	52	0	0	1	6
49	ITA 義大利	50	0	0	1	6
49	KRG 吉爾吉斯	50	0	0	2	6
49	LVA 拉脫維亞	50	0	0	1	6
52	LIT 立陶宛	49	0	0	2	6
52	UZB 烏茲別克	49	0	1	1	6
54	EST 愛沙尼亞	47	0	0	0	6
55	FIN 芬蘭	43	0	0	1	6
55	MAR 摩洛哥	43	0	0	0	6
55	NZL 紐西蘭	43	0	0	0	6
58	MAC 澳門	40	0	0	2	6
59	AUT 奧地利	38	0	0	0	6
60	PER 秘魯	37	0	0	1	4
60	TRK 土庫曼	37	0	0	1	4
62	ICE 冰島	33	0	0	1	6
62	TTB 千里達	33	0	0	0	6
64	NET 荷蘭	30	0	0	0	6
65	URU 烏拉圭	29	0	0	0	5

66	DEN 丹麥	27	0	0	0	5
67	MAL 馬來西亞	26	0	0	0	5
67	SUI 瑞士	26	0	0	0	6
69	LUX 盧森堡	25	0	0	1	2
70	ALB 阿爾巴尼亞	23	0	0	0	4
70	CYP 塞浦路斯	23	0	0	0	6
70	PUR 波多黎各	23	0	0	1	3
73	POR 葡萄牙	22	0	0	0	6
74	IRE 愛爾蘭	21	0	0	0	6
75	SLO 斯洛維尼亞	18	0	0	0	6
76	CUB 古巴	14	0	0	1	1
77	ECU 厄瓜多爾	11	0	0	0	6
78	VEN 委內瑞拉	10	0	0	0	3
79	PHI 菲律賓	9	0	0	0	6
80	KUW 科威特	8	0	0	0	3
81	SRL 斯里蘭卡	4	0	0	0	4
82	PAR 巴拉圭	0	0	0	0	1

六、參加本屆競賽績效

1、本屆國手在傳承德教授秉持著三大理念:「提供最佳學習支持」、「開拓最大學習空間」以及「確保最優發展未來」帶領下，培養國手具備「價值創造」、「績效卓越」以及「理性感性兼備」的學術特質。可以期待的是，國手們將能逐一跨越橫亙眼前的障礙，成功開拓未來光明的願景！

2、本屆國手葉仲恆同學係國中三年級應屆畢業生，為我國參加國際奧林匹亞各學科競賽以來，第一位非以高中學生身份參賽。葉生在 82 個參賽國 457 選手與賽的競賽中獲得銀牌的佳績。

3、與會其間我代表團與各國代表互相討論與研究競賽實務與理論，以促進各參賽國對台灣的瞭解，並贈送我國的禮品給各國領隊，受到全體與會代表的懷念與感謝。

七、結論與建議

1、建議數學奧林匹亞要有常設單位，且承辦單位要固定下來。

2、建議在亞太數學奧林匹亞研習營之前可與其他學會(如中華民國數學會)合辦數學營，以當作數學奧林匹亞活動之前哨工作的推動或宣傳。

3、建議亞太數學奧林匹亞的研習營與競賽可分開，則前者在人數及規模上可擴大(前提是相關經費預算要充足)，讓更多學生能受惠。

4、APMO 選拔前的配套措施(如各高中的數學競賽)，若相關數學學會有意願，可配合舉辦；數學奧林匹亞承辦單位可向有關當局反應升學配套措施不足之處。建議高中生申請大學各系之作業更有彈性一點，以免有特殊才能的學生在第一關就被刷掉。

5、建議針對歷年 IMO 國手之後續發展的追蹤調查報告要持續進行；希望教育部給予得獎同學應有的鼓勵(如升學保送)，及持續的培育計劃。

6、為了能讓應屆高三同學在參加數理奧林匹亞競賽活動時無後顧之憂，是否能夠在得亞太或國際數理奧林匹亞前列名次或獎牌後的大學入學甄試或保送時有保障名額。

八、參考資料

1、 顏啟麟、劉豐哲、陳昭地（民 80 年），第三十二屆國際數學奧林匹亞年會，科學教育月刊，142 期（80 年 9 月），第 8~12 頁。

2、 趙金祁等（民 81 年），中華民國參加 1992 年第三十三屆國際數學奧林匹亞競賽報告，科學教育月刊，152 期（81 年 9 月），第 24~32 頁。

3、 陳昭地等，（民 87 年），中華民國參加 1998 年第三十九屆國際數學奧林匹亞競賽計畫報告，第 1~89 頁。

4、 陳昭地等，（民 87 年），中華民國參加 1998 年第三十九屆國際數學奧林匹亞競賽成果及參觀訪問報告，第 1~43 頁。

5、 陳昭地等，（民 87 年），中華民國參加 1998 年第三十九屆國際數學奧林匹亞競賽紀念專利，第 1~218 頁。

6、 陳昭地等，（民 88 年），中華民國參加 1999 年第四十屆國際數學奧林匹亞競賽計畫報告，第 1~74 頁。

7、 陳昭地等，（民 88 年），中華民國參加 1999 年第四十屆國際數學奧林匹亞參賽報告，第 1~55 頁。

8、 陳昭地等，（民 89 年），中華民國參加 2000 年第四十一屆國際數學奧林匹亞競賽計畫報告，第 1~79 頁。

9、 陳昭地等，（民 89 年），中華民國參加 2000 年第四十一屆國際數學奧林匹亞參賽報告，第 1~53 頁。

10、 2000 年第四十一屆國際數學奧林匹亞競賽試題(41th IMO Problems & Solutions, 41th International Mathematical Olympiad Committee, July 13-24, 2000, Taejon, Korea)。

11、 2000 年第四十一屆國際數學奧林匹亞競賽秩序表(41th IMO Program, July 13-24, 2000, Taejon, Korea)。

12、 2000 年第四十一屆國際數學奧林匹亞競賽成績報告(41th IMO Exam Results, 2000 IMO Jury Committee, July 24, 2000, Taejon, Korea)。

13、 陳昭地等，（民 90 年），中華民國參加 2001 年亞太及國際數學奧林匹亞計畫報告，第 1~120 頁。

14、 2001 年第四十二屆國際數學奧林匹亞競賽試題預選題(42th IMO

Short-listed Problems & Solutions, 42th International Mathematical Olympiad Committee, July 1-14, 2001, Washington DC, USA)。

15、2001 年第四十二屆國際數學奧林匹亞競賽秩序表(42th IMO Program, July 1-14, 2001, Washington DC, USA)。

16、2001 年第四十二屆國際數學奧林匹亞競賽成績表(42th IMO Exam Results, , July 13, 2001, Washington DC, USA)。

17、2001 年第四十二屆國際數學奧林匹亞參賽報告，第 1~60 頁。

18、2002 年第四十三屆國際數學奧林匹亞競賽試題預選題(43th IMO Short-listed Problems & Solutions, 43th International Mathematical Olympiad Committee, July 19-30, 2002, Glasgow, UK)。

19、2002 年第四十三屆國際數學奧林匹亞競賽秩序表(43th IMO Program, July 19-30, 2002, Glasgow, UK)。

20、2002 年第四十三屆國際數學奧林匹亞競賽成績表(43th IMO Exam Results, , July 29, 2002, Glasgow, UK)。

21、2003 年第四十四屆國際數學奧林匹亞競賽試題預選題(44th IMO Short-listed Problems & Solutions, 44th International Mathematical Olympiad Committee, July 7-19, 2003, Tokyo, Japan)。

22、2003 年第四十四屆國際數學奧林匹亞競賽秩序表(44th IMO Program, July 7-19, 2003, Tokyo, Japan)。

23、2003 年第四十四屆國際數學奧林匹亞競賽成績表(44th IMO Exam Results, , July 19, 2003, Tokyo, Japan)。

第二章

2003第44屆國際數學奧林匹亞競賽試題解答

2003 年第44屆國際數學奧林匹亞競賽 (IMO) 是在日本的東京舉行; 本屆共有82個國家與會, 合計457位學生代表參賽。競賽活動是由各國領隊組成的評審會議 (Jury Meeting) 揭開序幕, 除了確認各項議題外, 評審會議的一個主要工作是挑選本屆的競賽試題。國際數學奧林匹亞競賽試題是先由各參賽國 (主辦國除外) 於規定時間期限內提交 0 ~ 6 道試題, 再由主辦國的試題委員會 (Problem Selection Committee) 研究選出大約30道預選試題, 分屬代數、分析、數論、幾何及組合數學等不同領域和不同難度的試題; 最後再經由評審會議票選暨修訂出最後6道 IMO 試題, 再依主題內容及難易層次分配成兩份試題, 分別在連續的兩天舉行競試, 每天三道試題, 考試時間都是4.5小時。本屆試題經由主辦國的試題委員會選出他們認爲較適當的27道試題, 再由各國領隊組成的評審會議經過三天的討論票選出一道代數題、二道數論題、二道幾何題及一道組合題, 其中第一題爲組合題、第二題爲數論題、第三題爲幾何題、第四題爲幾何題、第五題爲代數題、第六題爲數論題。

今年我國六位學生: 林金毅 (建國中學)、趙心宇 (建國中學)、黃紹倫 (建國中學)、黃道生 (建國中學)、廖紹棠 (高雄中學)、葉仲恆 (鳳西國中) , 總成績114分, 榮獲一面金牌、二面銀牌、二面銅牌, 在82隊中名列第十六名。總分前二十名的國家依次爲: 保加利亞、中國大陸、美國、越南、俄羅斯、韓國、羅馬尼亞、土耳其、日本、匈牙利、英國、加拿大、哈薩克、烏克蘭、印度、台灣、德國、伊朗、泰國、白俄羅斯。本文針對此次我國 代表團所翻譯成中文版的六道 IMO 試題提供參考解答, 以供國內相關學者、數學教師等輔導數學資優生之研究、應用與參考。

一、第44屆國際數學奧林匹亞競賽試題

Chinese version (Taiwan)

第一天

東京, 2003年7月13日

考試時間:4.5 小時

每題7分

第一題: 令 $S = \{1, 2, \cdots, 1000000\}$, 而 A 是一個恰有 101個元素的 S 的子集合。試證, 在 S 中存在著 $t_1, t_2, \cdots, t_{100}$ 使得下面的這些集合

$$A_j = \{x + t_j | x \in A\},\ j = 1, 2, \cdots, 100$$

任何相異的兩個都不相交。

第二題: 求所有能使

$$\frac{a^2}{2ab^2 - b^3 + 1}$$

成爲正整數的正整數對 (a, b)。

第三題: 凸六邊行的任何兩個對邊都有下面的性質: 兩對邊中點間的距離恰等於這兩個對邊長的和的 $\sqrt{3}/2$ 倍。試證這六邊 形的所有內角都相等。

(一個凸六邊形 $ABCDEF$ 有三組對邊:AB 和 DE; BC 和 EF 以及 CD 和 FA)

Chinese version (Taiwan)

第二天

東京, 2003年7月14日

考試時間:4.5 小時

每題7分

第四題: 設 $ABCD$ 爲一個圓内接四邊形, 自點 D 向直線 BC,CA 和 AB 做垂線, 設垂足分別爲 P,Q 和 R。試證 $PQ = QR$ 的充分必要條件是:$\angle ABC$ 的分角線,$\angle ADC$ 的分角線和 AC 這三線交於一點。

第五題: 設 n 爲一個正整數且 $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n$ 均爲實數。

(1) 試證

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|x_i - x_j|\right)^2 \leq \frac{2(n^2-1)}{3}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(x_i - x_j)^2.$$

(2) 證明上式中等號成立的充分必要條件是 $x_1, x_2 \cdots, x_n$ 爲一個等差序列。

第六題: 設 p 爲一個質數。試證: 存在一個質數 q, 使得對所有的整數 $n, n^p - p$ 都不能被 q 整除。

二、第44屆國際數學奧林匹亞競賽成績統計

表1. 2003年第44屆IMO前20名國家各國成績統計表

名次	國名	總分	金牌	銀牌	銅牌	參賽人數
1	保加利亞	227	6	0	0	6
2	中國大陸	211	5	1	0	6
3	美國	188	4	2	0	6
4	越南	172	2	3	1	6
5	俄羅斯	167	3	2	1	6
6	韓國	157	2	4	0	6
7	羅馬尼亞	143	1	4	1	6
8	土耳其	133	1	3	1	6
9	日本	131	1	3	2	6
10	匈牙利	128	1	3	1	6
10	英國	128	1	2	3	6
12	加拿大	119	2	0	3	6
12	哈薩克	119	1	2	2	6
14	烏克蘭	118	1	2	3	6
15	印度	115	0	4	1	6
16	台灣	114	1	2	2	6
17	德國	112	1	2	1	6
17	伊朗	112	0	3	2	6
19	泰國	111	1	1	3	6
19	白俄羅斯	111	1	2	2	6

表2. 2003年第44屆IMO中華民國學生代表得分及成績統計表

姓名	第1題	第2題	第3題	第4題	第5題	第6題	總分	獎牌
林金毅	7	3	0	7	0	0	17	銅牌
趙心宇	7	3	0	7	1	0	18	銅牌
黃紹倫	7	7	0	7	7	1	29	金牌
黃道生	2	3	0	7	7	1	20	銀牌
廖紹棠	2	0	0	0	7	0	9	榮譽獎
葉仲恆	7	3	0	7	4	0	21	銀牌

三、第44屆國際數學奧林匹亞競賽試題詳解

第一題: 令 $S=\{1,2,\cdots,1000000\}$, 而 A 是一個恰有 101 個元素的 S 的子集合。試證, 在 S 中存在著 $t_1,t_2,\cdots,t_{100}$ 使得下面的這些集合

$$A_j=\{x+t_j|x\in A\},\ j=1,2,\cdots,100$$

任何相異的兩個都不相交。

試題委員會公布的參考答案:

參考解答: 考慮集合 $D=\{x-y|x,y\in A\}$, 則集合 D 的元素個數至多有 $101\times 100+1=10101$ 個。因爲兩個集合 $A+t_i$ 與 $A+t_i$ 具有非空交集的充分必要條件爲 $t_i-t_j\in D$。所以我們僅需要依照此想法選取100個元素即可。

我們以數學歸納法選取這些元素。由 S 中任取一個元素。假設我們已選取 k 個元素, 此處 $k\leq 99$。(此 k 個元素選取的方式爲: 任一元素 x 已被選取, 則我們不能從集合 $x+D$ 選取另外一個元素。) 在 k 個元素被選取之後, 則 S 中至多有 999999 (因爲 $10101k\leq 999999$) 個元素不能被選取。因此, 我們可以再選取下一個元素。

推廣結果: 令 $S=\{1,2,\cdots,n\}$ 且 m 是一個正整數使得 $n>(m-1)(\binom{k}{2}+1)$, 而 A 是一個恰有 k 個元素的 S 的子集合。試證, 在 S 中存在著 $t_1,t_2,\cdots,t_m$ 使得下面的這些集合

$$A_j=\{x+t_j|x\in A\},\ j=1,2,\cdots,m$$

任何相異的兩個都不相交。

參考解答: 考慮集合 $B=\{|x-y||x,y\in A\}$, 則集合 B 的元素個數至多有 $\binom{k}{2}+1$ 個。

我們僅需要證明: 在 S 中存在著 $t_1,t_2,\cdots,t_m$ 使得 $|t_i-t_j|\notin B, i\neq j$。底下我們以數學歸納法選取 $t_1,t_2,\cdots,t_m$。

在 S 中選取一個元素 $t_1=1$且考慮集合 $C_1=S\backslash(B+t_1)$。則 $|C_1|\geq n-(\binom{k}{2}+1)>(m-2)(\binom{k}{2}+1)$。

對於 $1\leq i<m$, 假設 $t_1,t_2,\cdots,t_i$ 已被選取且 C_i 已被定義, $|C_i|>(m-i-1)(\binom{k}{2}+1)\geq 0$。因此, 我們可由集合 C_i 選取一個最小元素 t_{i+1} 而且考慮集合 $C_{i+1}=C_i\setminus(B+t_{i+1})$。則

$$|C_{i+1}|\geq|C_i|-\left(\binom{k}{2}+1\right)>(m-i-2)\left(\binom{k}{2}+1\right)\geq 0.$$

依照上述的方式,我們可選取符合題意的 $t_1, t_2, \cdots, t_m$。

林金毅同學的解法: 由題意設 $A = \{a_1, a_2, \cdots, a_{101} | 1 \le a_1 < a_2 < a_3 < \cdots < a_{101} \le 1000000\}$。定義 1000000 個集合: $A(p) = \{x + p | x \in A\}$, 其中 p 屬於 S, 則在 S 中選出滿足題設條件的 $t_1, t_2, \cdots, t_{100}$ 即是從以上定義出的 1000000 個集合中選出 100 個集合使得兩兩沒有交集。

而對每一個 p, $A(p)$ 至多有 $\binom{101}{2} = 5050$ 個 $p' > p$ 使得 $A(p)$ 和 $A(p')$ 的交集是非空。此因而這必然是存在一對 $u > v$ 屬於 $\{1, 2, \cdots, 101\}$ 使得 $A(p)$ 的第 u 個元素和 $A(p')$ 的第 v 個元素相同而對於每一對 $u > v$ 屬於 $\{1, 2, \cdots, 101\}$ 恰有一 $p' > p$ 使得 $a_u + p' = a_v + p$ 或 $a_u + p = a_v + p'$ 成立。(事實上, 若 $u < v$ 則 $a_u + p = a_v + p'$ 不可能成立) 由於這樣 u, v 共有 5050 組, 所以這樣的 p' 也至多有 5050 個。

把 $A(1), A(2), \cdots, A(1000000)$ 排列起來選, 現逐次選取 t_1, t_2, t_{100}: $t_1 = 1, t_{n+1} =$ 選完 t_n 後可以選的最小數。其中 t_n 不可以選的就是 $A(t_n)$ 會和之前選出的某 $A(t_k)$ 的交集非空。於是 只在每次選完 t_n 時把那些會和他有交集的集合 $A(t'_n)$ (至多有 5050 個) 和 $A(t_n)$ (合起來至多有 50501 個) 從可以選的範圍 去掉再選就沒有問題了。底下證明:

$$\text{對所有 } n \le 100, \text{ 可以選出 } t_n.$$

我們利用反證法, 假設不然。則由以上選法知: 選完了 t_{n-1} 以後, 從 $1, 2, \cdots, 1000000$ 共 1000000 都不可以選了。但是選了 $n-1$ 次最多排除了 $5051(n-1) \le 5051 \times 99 < 1000000$ 可以選。矛盾。

所以 $t_1, t_2, \cdots, t_{100}$ 都選出來了, 這些 $t_1, t_2, \cdots, t_{100}$ 根據選法確實滿足題意。

第二題: 求所有能使

$$\frac{a^2}{2ab^2 - b^3 + 1}$$

成爲正整數的正整數對 (a, b)。

試題委員會公布的參考答案:

參考解答: 令 $(a.b)$ 是滿足題意的一個序對。因

$$\begin{aligned} & k = \frac{a^2}{2ab^2 - b^3 + 1} > 0 \\ \Rightarrow \quad & 2ab^2 - b^3 + 1 > 0, \ a > \frac{b}{2} - \frac{1}{2b^2} \\ \Rightarrow \quad & a \ge \frac{b}{2} \end{aligned}$$

根據上式, 可得

$$k \geq \text{ 或 } a^2 \geq b^2(2a-b)+1, (\Rightarrow a^2 > b^2(2a-b) \geq 0).$$

因此

$$a > b \text{ 或 } 2a = b. \tag{1}$$

對於固定正整數 k 和 b, 考慮方程式

$$a^2 - 2kb^2a + k(b^3-1) = 0 \tag{2}$$

的兩根 a_1, a_2 (假設 $a_1 \geq a_2$)。由根與係數關係知:$a_1 + a_2 = 2kb^2$, $a_1a_2 = k(b^3-1)$。根據上述, 我們可得:

$$a_1 \geq kb^2 > 0,\ 0 \leq a_2 = \frac{k(b^3-1)}{a_1} \leq \frac{k(b^3-1)}{kb^2} < b.$$

結合 (1) 式可得: $a_2 = 0$ 或 $a_2 = \frac{b}{2}$ (此處 b 必為偶數)。

(i) 若 $a_2 = 0$ 則 $b^3 - 1 = 0$。因此 $a_1 = 2k, b = 1$。

(ii) 若 $a_2 = \frac{b}{2}$ 則 $k = \frac{b^2}{4}$ 且 $a_1 = \frac{b^4}{2} - \frac{b}{2}$。

由上述的討論可知滿足題意的序對 (a,b) 為: 對於某個正整數 ℓ

$$(a,b) = (2\ell, 1) \text{ 或 } (\ell, 2\ell) \text{ 或 } (8\ell^4 - \ell, 2\ell).$$

註解1: (1) 式的另一種解法: 固定 $a \geq 1$ 且考慮方程式 $f_a(b) = 2ab^2 - b^3 + 1$。則 $f_a(b)$ 在區間 $[0, \frac{4a}{3}]$ 是遞增函數, 在區間 $[\frac{4a}{3}, \infty)$ 是遞減函數。由此可得

$$\begin{aligned} f_a(a) &= a^3 + 1 > a^2, \\ f_a(2a-1) &= 4a^2 - 4a + 2 > a^2, \\ f_a(2a+1) &= -4a^2 - 4a < 0. \end{aligned}$$

因此, 若 $b \geq a$ 且 $\frac{a^2}{f_a(b)}$ 是一個正整數則 $b = 2a$。

若 $a \leq b \leq \frac{4a}{3}$ 則 $f_a(b) \geq f_a(a) > a^2$ 且 $\frac{a^2}{f_a(b)}$ 不是一個正整數。(矛盾)

若 $b > \frac{4a}{3}$ 則

(i) 若 $b \geq 2a+1$ 則 $f_a(b) \leq f_a(2a+1) < 0$ (矛盾);

(ii) 若 $b \leq 2a-1$ 則 $f_a(b) \geq f_a(2a-1) > a^2$ 且 $\frac{a^2}{f_a(b)}$ 不是一個正整數。(矛盾)

註解2: 此題有很多種解法, 底下列出其中三種。

解法 (一): 令 D爲方程式 (2) 的判別式, 則 D 是某個非負整數 d 的平方, 即

$$D = (2b^2k - b)^2 + 4k - b^2 = d^2.$$

(i) 若 $e = 2b^2k - b = d$, 則 $4k = b^2$ 且 $a = 2b^2k - \frac{b}{2}, \frac{b}{2}$.

(ii) 若 $e \neq d$, 則 $|d^2 - e^2| \geq 2e - 1 \Rightarrow |4k - b^2| \geq 4b^2k - 2b - 1$.

(iii) 若 $4k - b^2 > 0$, 則 $b = 1$。

其他情形是無解。

解法 (二): 假設 $b \neq 1$ 且令 $s = gcd(2a, b^3-1), 2a = su, b^3-1 = st', 2ab^2-b^3+1 = st$. 則 $t + t' = ub^2$ 且 $gcd(u,t) = 1$。由 $st|a^2$, 可得 $t|s$. 令 $s = rt$. 則原問題可簡化成底下的引理:

引理: 令 b, r, t, t', u 是滿足 $b^3 - 1 = rtt'$ 與 $t + t' = ub^2$ 的正整數。則 $r = 1$ 且 t, t', u三數之中有一爲 1。

證明: 由 $b^3 - 1 = rtt'$ 與 $t + t' = ub^2$ 可得 $b^3 - 1 = rt(ub^2 - t) = rt'(ub^2 - t)$。因 $rt^2 \equiv rt'^2 \equiv 1 (\mathrm{mod}\ \ b^2)$, 若 $rt^2 \neq 1$ 且 $rt'^2 \neq 1$, 則 $t, t' > \frac{b}{\sqrt{r}}$。我們可得

$$r\frac{b}{\sqrt{r}}(ub^2 - \frac{b}{\sqrt{r}}) \geq b^3 - 1,\ \text{除非}\ r = u = 1.$$

解法 (三): 我們沿用上述的符號, 因 $rt^2|(b^3-1)^2$, 所以僅需要證明底下的引理:

引理: 令 $b \geq 2$。若一正整數 $x \equiv 1 (\mathrm{mod}\ \ b^2)$ 能被 $(b^3 - 1)^2$ 整除, 則 $x = 1$ 或 $x = (b^3 - 1)^2$ 或 $(b, x) = (4, 49)$ 或 $(4, 81)$。

證明: 令 p,q 是正整數具有 $p > q > 0$ 且滿足 $(b^3 - 1)^2 = (pb^2 + 1)(qb^2 + 1)$。則

$$\begin{aligned} & b^4 = 2b + p + q + pqb^2 \\ \Rightarrow\ \ & (q(pq - b^2) + 1)b^4 = p - (q + 2b)(qb^2 - 1) \\ \Rightarrow\ \ & -3 < \frac{p - (q + 2b)(qb^2 - 1)}{b^4} < 1. \end{aligned}$$

根據上述, 可得證。

趙心宇同學的解法: 設 $\frac{a^2}{2ab^2-b^3+1} = k$, 得 $a^2 - 2kb^2a + b^3k - k = 0$, 視爲 a 的二次方程式, 因爲 a 是 整數, 所以判別式必須是一個完全平方數。由 $\Delta = 4(k^2b^4 - b^3k + k)$,

而 4 是一個完全平方數, 故 $k^2b^4 - b^3k + k = m^2$, 其中 m 是自然數。但是當 b 爲偶數時易得不等式:

$$(kb^2 - \frac{b}{2} + 1)^2 > k^2b^4 - b^3k + k = (kb^2 - \frac{b}{2})^2 + k - \frac{b^2}{4} > (kb^2 - \frac{b}{2} - 1)^2$$

故必有

$$k^2b^4 - b^3k + k = (kb^2 - \frac{b}{2})^2 + k - \frac{b^2}{4} = (kb^2 - \frac{b}{2})^2 \Rightarrow k = \frac{b^2}{4}.$$

若 b 是奇數,

$$(kb^2 - \frac{b}{2} + \frac{1}{2})^2 \geq k^2b^4 - b^3k + k = (kb^2 - \frac{b}{2})^2 + k - \frac{b^2}{4} > (kb^2 - \frac{b}{2} - \frac{1}{2})^2$$

上述不等式成立的條件是 $b = 1$, 故 b 不可能是大於 1 的奇數。

(i) $b = 1$ 時, 必有 $a = 2k$。所以 $(2k, 1)$ 是其中一組解。

(ii) b 爲偶數時, 將 $k = \frac{b^2}{4}$ 代入, 得出:

$$a = \frac{2kb^2 \pm \sqrt{\Delta}}{2} = kb^2 \pm (kb^2 - \frac{b}{2}) = \frac{b}{2},\ \frac{b^4 - b}{2}$$

帶入驗證皆合乎條件。故滿足題意的所有解爲:$(2k, 1), (\frac{b}{2}, b), (\frac{b^4-b}{2}, b)$.

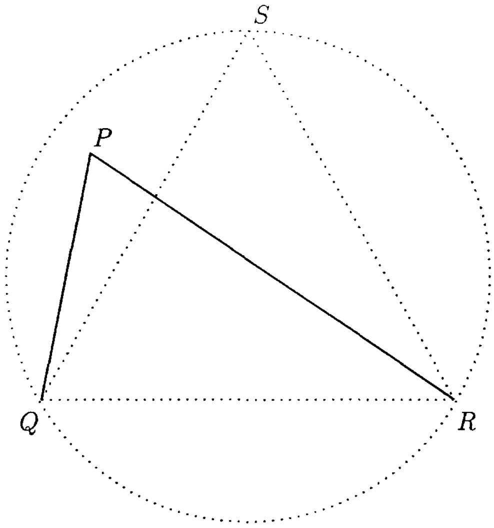
第三題: 凸六邊行的任何兩個對邊都有下面的性質: 兩對邊中點間的距離恰等於這兩個對邊長的和的 $\sqrt{3}/2$ 倍。試證這六邊 形的所有內角都相等。

(一個凸六邊形 $ABCDEF$ 有三組對邊:AB 和 DE; BC 和 EF 以及 CD 和 FA)

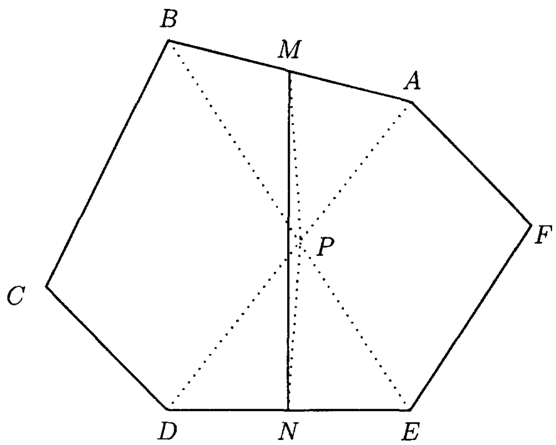
試題委員會公布的參考答案:

參考解答 (一): 首先我們先證底下的一個引理:

引理: 考慮一個三角形 PQR 其中 $\angle QRP \geq 60°$。令 L 是 QR 的中點。則 $PL \leq \frac{\sqrt{3}}{2}QR$, 此處等號成立的 充分必要條件是三角形 PQR 爲正三角形。



證明: 令 S 是使得三角形 QRS 爲正三角形的一個點, 此處 P 點與 S點在 QR 的同一側。則 P 點落在三角形 QRS 的外接圓之內部。同時,P 點也落在以 L爲中心,$\frac{\sqrt{3}}{2}QR$ 爲半徑的圓內。故得證。



因爲凸六邊行的主對角線可形成一個三角形 (此三角形可能是退化的), 所以我們可選取其中的兩條主對角線使其形成的角大於或等於 $60°$。不失其一般性, 我們可假設凸六邊行 $ABCDEF$ 的兩條主對角線 AD 與 BE 滿足 $\angle APB \geq 60°$, 此處 P 點是主對角線 AD 與 BE 的交點。根據上述引理, 可得:

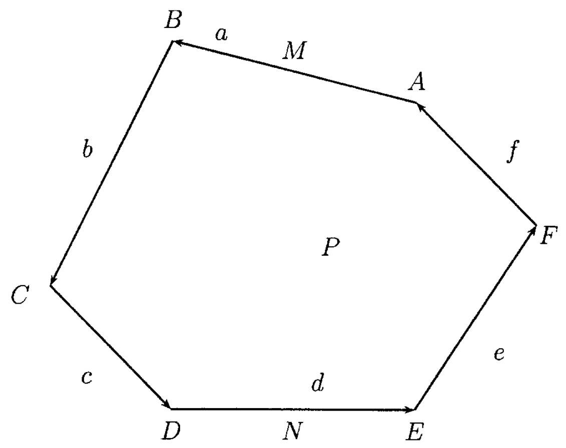
$$MN = \frac{\sqrt{3}}{2}(AB + DE) \geq PM + PN \geq MN,$$

此處 M 與 N 分別是 AB 與 DE 的中點。所以三角形 ABP 與 DEP 是正三角形。

另一方面, 主對角線 CF 與 AD 或 BE 可形成一個大於或等於 $60°$ 的角。不失其一般性, 我們可假設此角爲 $\angle AQF \geq 60°$, 其中 Q 是主對角線 AD 與 CF 的交點。依上述的方法, 我們可得: 三角形 AQF 與 CQD 是正三角形。由此可知:$\angle BRC = 60°$, 其中 R 是主對角線 BE 與 CF 的交點。再依據上述的作法, 可得: 三角形 BCR 與 EFR 是正三角形。故得證。

參考解答 (二):

令 $ABCDEF$ 爲一給定的凸六邊形且 $a = \vec{AB}, b = \vec{BC}, \cdots, f = \vec{FA}$。



令 M, N分別為 AB 與 DE 的中點, 則

$$\vec{MN}=\frac{1}{2}a+b+c+\frac{1}{2}d \text{ 和 } \vec{MN}=-\frac{1}{2}a-f-e-\frac{1}{2}d.$$

所以

$$\vec{MN}=\frac{1}{2}(b+c-e-f). \tag{1}$$

根據題意, 可得

$$\vec{MN}=\frac{\sqrt{3}}{2}(|a|+|d|)\geq\frac{\sqrt{3}}{2}|a-d|. \tag{2}$$

令 $x=a-d$, $y=c-f$, $z=e-b$。由 (1) 與 (2), 可得

$$|y-z|\geq\sqrt{3}|x|. \tag{3}$$

同理可得

$$|z-x|\geq\sqrt{3}|y|. \tag{4}$$

$$|x-y|\geq\sqrt{3}|z|. \tag{5}$$

觀察得

$$\begin{aligned}(3) &\quad\Leftrightarrow\quad |y|^2-2yz+|z|^2\geq 3|x|^2,\\ (4) &\quad\Leftrightarrow\quad |z|^2-2zx+|x|^2\geq 3|y|^2,\\ (5) &\quad\Leftrightarrow\quad |x|^2-2xy+|y|^2\geq 3|z|^2.\end{aligned}$$

由上式可得

$$-|x|^2-|y|^2-|z|^2-2yz-2zx-2xy\geq 0, \text{ 或 } -|x+y+z|^2\geq 0.$$

因此, 我們可得

$$\begin{aligned}&x+y+z=0\\ &|y-z|=\sqrt{3}|x|, \qquad a\,||\,d\,||\,x,\\ &|z-x|=\sqrt{3}|y|, \qquad c\,||\,f\,||\,y,\\ &|x-y|=\sqrt{3}|z|, \qquad e\,||\,b\,||\,z.\end{aligned}$$

假設 PQR 是一個三角形使得 $\vec{PQ} = x, \vec{QR} = y, \vec{RP} = z$。不失其一般性, 我們可假設 $\angle QPR \geq 60°$。令 L 爲 QR 的中點, 則 $PL = \frac{|z-x|}{2} = \frac{\sqrt{3}|y|}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}QR$。根據解法 (一), 可知: PQR 是一個正三角形。所以 $\angle ABC = \angle BCD = \cdots = \angle FAB = 120°$。

黃道生同學的解法: 如圖 (一), 考慮三角形 ABC 及 AB 的中點 M。考慮 CM 的長度與角 C 的關係, 此處以 C 代表角 C 的大小。下證:

引理一: 當 $C > 60°, CM < \frac{\sqrt{3}}{2}AB$。

由餘弦定律知:

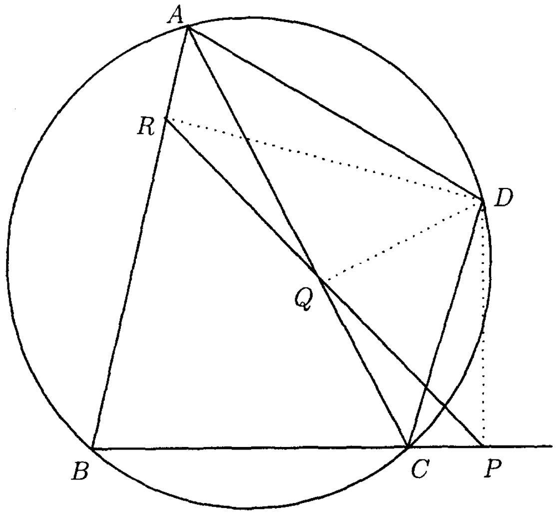
$$\begin{aligned} AC^2 + BC^2 = AB^2 + 2AC \cdot BC \cos C < AB^2 + 2AC \cdot BC \cos 60° \qquad (1) \\ \leq \; AB^2 + \frac{AC^2 + BC^2}{2} \end{aligned}$$

所以 $AC^2 + BC^2 < 2AB^2$。再由中線定理知: $4CM^2 + AB^2 = 2AC^2 + 2BC^2 < 4AB^2$。所以 $4CM^2 < 3AB^2 \Rightarrow CM < \frac{\sqrt{3}}{2}AB$。

如圖 (二): 設凸六邊形 $ABCDEF$,M, N 分別爲 AB, DE 之中點,P 爲對角線 AD, BE之交點。若 $\angle APB > 60°$, 則由 引理一及三角不等式可得: $MN \leq MP + NP < \frac{\sqrt{3}}{2}(AB + DE)$, 此與題設不合, 所以,$\angle APB \leq 60°$ (引理二)。

主證明: 如圖 (三), 由引理 (二):$\angle APB, \angle FQE, \angle CRD$ 全都小於或等於 60°。但, 顯然這三個角的和爲 180° (不論有沒有退化)。所以,$\angle APB = \angle FQE = \angle CRD = 60°$。由 引理一的證明中 (1) 式可知: 若 $\angle APB = 60°$ 而不等號必須成爲等號 (在引理一中,$CM = \frac{\sqrt{3}}{2}AB$), 必須 $AC = CB$, 因爲 M 爲中點所以 CM 垂直 AB。而且 CM 爲 角 C 的平分線。現在有 $\angle APB, \angle CRD$ 的平分線, 互相夾角爲 120°, AB 垂直 $\angle APB$ 之平分線, AF 垂直 $\angle CRD$ 之平分線, 而且 $ABCDEF$ 爲凸六邊形。所以 $\angle BAF = 120°$。同理可得凸六邊形 $ABCDEF$ 的每個角都是 120°, 故每個角都相等。

第四題: 設 $ABCD$ 爲一個圓內接四邊形, 自點 D 向直線 BC,CA 和 AB 做垂線, 設垂足分別爲 P,Q 和 R。試證 $PQ=QR$ 的充分必要條件是:$\angle ABC$ 的分角線,$\angle ADC$ 的分角線和 AC 這三線交於一點。



試題委員會公布的參考答案:

參考解答 (一): 由 Simson 定理知:P,Q,R 三點共線。因 $\angle DPC$ 與 $\angle DQC$ 爲直角且 D,P,Q,C 四點共圓, 所以 $\angle DCA=\angle DPQ=\angle DPR$。同理, D,Q,R,A 四點共圓, 所以 $\angle DAC=DRP$。因此 $\triangle DCA\sim\triangle DPR$。

同理可證:$\triangle DAB\sim\triangle DQP$ 與 $\triangle DBC\sim\triangle DRQ$。則

$$\frac{DA}{DC}=\frac{DR}{DP}=\frac{DB\cdot\frac{QR}{BC}}{DB\cdot\frac{PQ}{BA}}=\frac{QR}{PQ}\cdot\frac{BA}{BC}.$$

故 $PQ=QR$ 充分必要條件是 $\frac{DA}{DC}=\frac{BA}{BC}$。由此可得證。

參考解答 (二): 假設 $\angle ABC$ 的分角線與$\angle ADC$ 的分角線分別與 AC 交於 L 與 M 兩點。因爲

$$\frac{AL}{CL}=\frac{AB}{CB} \text{ 與 } \frac{AM}{CM}=\frac{AD}{CD}.$$

所以, $\angle ABC$ 的分角線,$\angle ADC$ 的分角線和 AC 這三線交於一點的充分必要條件是 $\frac{AB}{CB}=\frac{AD}{CD}$, 即 $AB\cdot CD=CB\cdot AD$。底下, 我們將證明: $AB\cdot CD=CB\cdot AD$ 的充分必要條件是 $PQ=QR$。

因為 $DP \perp BC$, $DQ \perp AC$, $DR \perp AB$, 所以我們有:(i) 以 DC 為直徑的圓包含了 P, Q 兩點; (ii) 以 DA 為直徑的圓包含了 Q, R 兩點。因此, $\angle PDQ = \gamma$ 或 $180° - \gamma$, 其中 $\gamma = \angle ACB$。同理可得:$\angle QDR = \alpha$ 或 $180° - \alpha$, 其中 $\alpha = \angle CAB$。由正弦定律, 可得

$$PQ = CD \sin\gamma \text{ 與 } QR = AD \sin\alpha.$$

所以, $PQ = QR$ 的充分必要條件是 $\frac{CD}{AD} = \frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}$.

另一方面, 再由正弦定律, 可得:$\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma} = \frac{CB}{AB}$。所以, $PQ = QR$ 的充分必要條件是 $\frac{CD}{AD} = \frac{CB}{AB}$, 即 $AB \cdot CD = CB \cdot AD$。

葉仲恆同學的解法: (i) 設 $\angle ADC, \angle ABC$ 之角平分線分別交 AC 於 F 與 f 兩點。由角平分線定理知:

$$\frac{DC}{DA} = \frac{CF}{FA}, \ \frac{BC}{BA} = \frac{Cf}{fA}.$$

$\angle ADC, \angle ABC$ 之角平分線和 AC 三線共點的充分必要條件是 F 與 f 兩點重合。所以 $\angle ADC, \angle ABC$ 之角平分線和 AC 三線共點的充分必要條件是 $\frac{DC}{DA} = \frac{BC}{BA}$。

(ii) 由於$\angle DRC = \angle DQC = 90°$, $\angle DQA + \angle DPA = 180°$, 可知 $DRCQ$, $DQPA$ 四點共圓。又 DR, DA 分別在 $DRCQ$, $DQPA$ 的外接圓對 $90°$ 的圓周角, 可知 DR, DA 分別是 $DRCQ$, $DQPA$ 的外接圓的直徑。由正弦定律知:

$$RQ = DC \sin\angle RDQ, \ \ PQ = DA \sin\angle PDQ.$$

再由 $DRCQ$, $DQPA$ 四點共圓, 可知: $\angle RDQ = \angle BCA$, $\angle PDQ = \angle BAC$, 即

$$RQ = DC \sin\angle BCA, \ \ PQ = DA \sin\angle BAC.$$

所以 $\frac{RQ}{PQ} = \frac{\sin\angle BCA}{\sin\angle BAC}$.

(iii) 由正弦定律知:$\frac{BC}{BA} = \frac{\sin\angle BCA}{\sin\angle BAC}$, 推得

$$\frac{DC}{DA} = \frac{BC}{BA} = \frac{\sin\angle BCA}{\sin\angle BAC} \Leftrightarrow DC \sin\angle BCA = DA \sin\angle BAC \Leftrightarrow PQ = RQ.$$

所以,$\angle ADC, \angle ABC$ 之角平分線和 AC 三線共點的充分必要條件是 $PQ = RQ$。

第五題: 設 n 爲一個正整數且 $x_1 \le x_2 \le \cdots \le x_n$ 均爲實數。

(1) 試證

$$\Big(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|x_i - x_j|\Big)^2 \le \frac{2(n^2-1)}{3}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(x_i - x_j)^2.$$

(2) 證明上式中等號成立的充分必要條件是 $x_1, x_2 \cdots, x_n$ 爲一個等差序列。

試題委員會公布的參考答案:

參考解答: (1) 因不等式兩邊對於 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的任意變換是不變的, 所以在不失一般性的情況下我們可假設 $\sum_{i=1}^{n} x_i = 0$。經簡單計算後可得

$$\sum_{i,j=1}^{n}|x_i - x_j| = 2\sum_{i<j}(x_j - x_i) = 2\sum_{i=1}^{n}(2i-n-1)x_i.$$

由 Cauchy-Schwartz 不等式可得

$$\Big(\sum_{i,j=1}^{n}|x_i - x_j|\Big)^2 \le 4\sum_{i=1}^{n}(2i-n-1)^2\sum_{i=1}^{n}x_i^2 = 4\cdot\frac{n(n+1)(n-1)}{3}\sum_{i=1}^{n}x_i^2.$$

另一方面, 我們有

$$\sum_{i,j=1}^{n}(x_i - x_j)^2 = n\sum_{i=1}^{n}x_i^2 - \sum_{i=1}^{n}x_i\sum_{j=1}^{n}x_j + n\sum_{j=1}^{n}x_j^2 = 2n\sum_{i=1}^{n}x_i^2.$$

因此

$$\Big(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|x_i - x_j|\Big)^2 \le \frac{2(n^2-1)}{3}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(x_i - x_j)^2.$$

(2) 如果等式成立, 則 $x_i = k(2i-n-1)$, 對於某個 k, 其意爲 $x_1, \cdots, x_n$ 是一個等差數列。

另一方面, 假設 $x_1, \cdots, x_n$ 是一個具有公差爲 d 的等差數列。則我們可得

$$x_i = \frac{d}{2}(2i-n-1) + \frac{x_1 + x_n}{2}.$$

$x_1, \cdots, x_n$ 經由 $-\frac{x_1+x_n}{2}$ 的變換可得 $x_i = \frac{d}{2}(2i-n-1)$ 與 $\sum_{i=1}^{n} x_i = 0$。由此可得等號成立。

廖紹棠同學的解法: 因 $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|x_i-x_j| = 2\sum_{1\le i<j\le n}|x_i-x_j|$, 所以原命題可化爲

$$\frac{n^2-1}{3}\sum_{1\le i<j\le n}|x_i-x_j|^2 \ge \Big(\sum_{1\le i<j\le n}|x_i-x_j|\Big)^2. \tag{1}$$

令 $|x_i-x_j| = a_i$, 即 $|x_i-x_{i+k}| = a_i+a_{i+1}+\cdots+a_{i+k-1}$。考慮一數列

$$S = (n-1)\times 1^2+(n-2)\times 2^2+(n-3)\times 3^3+\cdots+1\times(n-1)^2 = \frac{n^4-n^2}{12}.$$

令 $S' = (n-1)\times(\frac{2}{n})^2+(n-2)\times(\frac{4}{n})^2+\cdots+1\times(\frac{2n-2}{n})^2 = \frac{4}{n^2}S = \frac{n^2-1}{3}$。因此 (1) 之左式可化爲

$$\begin{aligned}
&\Big(\sum_{1\le i<j\le n}|x_i-x_j|^2\Big)\Big((n-1)\times(\frac{2}{n})^2+(n-2)\times(\frac{4}{n})^2+\cdots+1\times(\frac{2n-2}{n})^2\Big)\\
\ge\ &\Big(\frac{2}{n}a_1+\frac{2}{n}a_2+\cdots+\frac{2}{n}a_{n-1}+\frac{4}{n}(a_1+a_2)+\cdots+\frac{4}{n}(a_{n-2}+a_{n-1})+\cdots\\
&+\frac{2n-2}{n}(a_1+a_2+\cdots+a_{n-1})\Big)
\end{aligned} \tag{2}$$

接著我們若能證明 (2) 之右式等於 (1) 之右式, 則此題得證。

在 (1) 之右式中, 平方前 a_k 的係數爲:

$$\begin{aligned}
a_k &= (\frac{n+1}{2})^2-|k-\frac{n+1}{2}|^2,\ \text{當 } n \text{ 是奇數。}\\
a_k &= \frac{n^2+2n}{4}-(|k-\frac{n+1}{2}|-\frac{1}{2})(|k-\frac{n+1}{2}|+\frac{1}{2}),\ \text{當 } n \text{ 是偶數。}
\end{aligned}$$

在 (2) 之右式中, 平方前 a_k 的係數爲:

$$\begin{aligned}
a_k &= (\frac{n+1}{2})^2-|k-\frac{n+1}{2}|^2,\ \text{當 } n \text{ 是奇數。}\\
a_k &= \frac{n^2+2n}{4}-(|k-\frac{n+1}{2}|-\frac{1}{2})(|k-\frac{n+1}{2}|+\frac{1}{2}),\ \text{當 } n \text{ 是偶數。}
\end{aligned}$$

因此, 可知 (2) 之右式等於 (1) 之右式。故此命題得證。

第六題: 設 p 爲一個質數。試證: 存在一個質數 q, 使得對所有的整數 n,$n^p - p$ 都不能被 q 整除。

試題委員會公布的參考答案:

參考解答: 因 $\frac{p^p-1}{(p-1)} = 1 + p + p^2 + \cdots + p^{p-1} \equiv p + 1 \pmod{p^2}$, 我們可得 $\frac{p^p-1}{(p-1)}$ 至少有一質因數 q 且 $q \not\equiv 1 \pmod{p^2}$。此質因數 q 即爲所求, 證明如下。假設存在一正整數 n 使得 $n^p \equiv p \pmod{q}$。則由 q 的定義知:

$$n^{p^2} \equiv p^p \equiv 1 \pmod{q}.$$

另一方面, 因 q 是質數。由 Fermat's little 定理知:

$$n^{q-1} \equiv 1 \pmod{q}.$$

因 $p^2 \not| q-1$, 所以 $(p^2, q-1)|p$。如此可推得 $n^p \equiv 1 \pmod{q}$。因此, $p \equiv 1 (\bmod q)$。然而, $1 + p + p^2 + \cdots + p^{p-1} \equiv p \pmod{q}$。由 q 定義知: $p \equiv 0 \pmod{q}$。此爲一矛盾結果。故本題得證。

第三章

中華民國參加2003年第44屆國際數學奧林匹亞競賽

代表團領隊工作報告

一、前言

2003年第44屆國際數學奧林匹亞競賽於日本東京舉行;中央研究院統計科學研究所接受教育部委託辦理「中民國參加二○○三年亞太數學暨國際數學奧林匹亞競賽計畫」,個人為該計畫主持人,理應全程參與整個競賽活動(7月7日~7月19日)。今年代表團受SARS疫情影響,主辦國日本以WHO於六月二十日是否將我國列為SARS感染疫區以決定我代表團是否應提前至該國或其他非感染區進行隔離觀察十日。其間雖經我方積極向主辦單位爭取希望能在我國無疫情地區自行隔離,惟未為主辦單位接受,並於六月十九日通知我代表團需進行隔離觀察。基於尊重主辦國之立場,同時考量隔離期間所有成員交通食宿生活費用之經濟效益,以及國手集訓工作之延續,選擇至日本隔離觀察,並配合主辦單位需要分兩梯次出發。第一梯次由個人及觀察員趙民德教授所組成,於六月二十八日早上由台北出發,於當日下午抵達日本成田機場,再搭車前往飯店以進行隔離觀察。第二梯次由副領隊左太政教授及觀察員洪文良教授及六位國手:林金毅(建國中學)、趙心宇(建國中學)、黃紹倫(建國中學)、黃道生(建國中學)、廖紹棠(高雄中學)、葉仲恆(鳳西國中)所組成,於七月一日早上由台北出發,於當日下午抵達日本成田機場,到達機場之後再由台北駐日經濟文化代表處文化組黃冠超先生帶領代表團前往飯店以進行隔離觀察。由於代表團出國期間已達二十餘日,代表團成員均已歸國心切,因此在七月十九日競賽結束後隨即返國,未再安排後續文教參訪行程。

二、代表團成員

這次我國代表團成員共10人，代表團的主要工作有二項：(一) 參加本屆國際數學奧林匹亞競賽活動；(二) 促進國際友誼與交流。底下是本屆代表團成員名單及任務分配表：

2003 年第 43 屆中華民國參加國際數學奧林匹亞競賽代表團名單

職務	姓名	性別	服務機關（就讀學校）	職稱	職責
領隊	傅承德	男	中央研究院 統計科學研究所	研究員	1、負責代表團國內、外之聯絡，蒐集觀察政府支援2003IMO實務運作。 2、代表中華民國參加2003APMO年會，負責參賽連繫協調業務。 3、入闈選題、翻譯試題；閱卷評分及協調成績。
副領隊	左太政	男	高雄師範大學 數學系	教授	1、輔導學生生活起居，帶領學生代表。 2、協助評閱試卷及協調成績。
觀察員	趙民德	男	中央研究院 統計科學研究所	研究員	協助領隊入闈選題、翻譯試題及評閱試卷。
觀察員	洪文良	男	新竹師範學院 數學教育學系	副教授	輔導學生生活起居及蒐集研究數學競試資料。
隊員	林金毅	男	台北市立建國高級中學	學生	參加比賽
隊員	趙心宇	男	台北市立建國高級中學	學生	參加比賽
隊員	黃紹倫	男	台北市立建國高級中學	學生	參加比賽
隊員	黃道生	男	台北市立建國高級中學	學生	參加比賽
隊員	廖紹棠	男	高雄市立高雄高級中學	學生	參加比賽
隊員	葉仲恆	男	高雄縣立鳳西國民中學	學生	參加比賽

三、領隊工作報告

茲因出國期間，配合 2003 年第 43 屆國際數學奧林匹亞競賽，有關工作行程列表如下：

日期	星期	工作行程
6 月 28 日	六	與觀察員趙民德早上搭機至日本隔離觀察。
7 月 1 日	二	資料蒐集研究
7 月 2 日	三	培訓活動及資料蒐集研究
7 月 3 日	四	培訓活動及資料蒐集研究
7 月 7 日	一	下午抵達 National Olympics Youth Center 辦理報到註冊。
7 月 8 日	二	研究預選試題及評列試題的難易度
7 月 9 日	三	進行選題會議票選出第三、第六兩道最難題目。
7 月 10 日	四	進行選題會議票選出第一、第二、第四、第五四道題目並確認英、法、德、俄文試題版本：各國翻譯製作試題。
7 月 11 日	五	翻譯製作試題並確認各參賽國語文試題。
7 月 12 日	六	開幕典禮
7 月 13 日	日	上午參加第一天競賽學生問題解釋會議，晚上開始閱卷。
7 月 14 日	一	上午參加第二天競賽學生問題解釋會議，晚上開始閱卷。
7 月 15 日	二	協調成績
7 月 16 日	三	協調成績，晚上參加評審會議確定成績與得獎標準。
7 月 17 日	四	參加大會安排之參觀活動。
7 月 18 日	五	上午與各國代表聯誼；下午參加閉幕頒獎典禮；晚間參加惜別晚宴。
7 月 19 日	六	返抵國門

四、工作績效

1、本屆國手在個人秉持著三大理念:「提供最佳學習支持」、「開拓最大學習空間」以及「確保最優發展未來」帶領下，培養國手具備「價值創造」、「績效卓越」以及「理性感性兼備」的學術特質。可以期待的是，國手們將能逐一跨越橫互眼前的障礙，成功開拓未來光明的願景!

2、本屆國手葉仲恆同學係國中三年級應屆畢業生，為我國參加國際奧林匹亞各學科競賽以來，第一位非以高中學生身份參賽。葉生在 82 個參賽國 457 選手與賽的競賽中獲得銀牌的佳績。

3、與會其間我代表團與各國代表互相討論與研究競賽實務與理論，以促進各參賽國對台灣的瞭解，並贈送我國的禮品給各國領隊，受到全體與會代表的懷念與感謝。

第四章

2003 年第 44 屆 IMO 競賽心得報告

黃紹倫

前言：

今年是很不一樣的一年，以往的數學奧林匹亞競賽都是由師大負責，今年改由中央研究院承辦，也是一番新的格局。

今年最特別的地方是發生了 SARS，導致我們需要提前到日本隔離十天，因此賽後的旅遊就被取消了，有點可惜！

亞太&選訓：

今年考亞太的時候狀況不是很好，加上考前嚴重失眠，原本不期待有好成績，幸好考題偏向我較擅長的計算，最後結果還算理想（金牌）。

在選訓營的時候，有一段時間我壓力很大，因為獨立研究作的很不好（只有去年的一半），加上又是前國手，好像一年來沒什麼進步，所以覺得有點沮喪，幸好家人和師長都很支持我，讓我又有繼續向前的動力，最後順利選上國手。

培訓：

這是中研院和師大最不同的地方，以往師大的培訓會請很多老師來上課，也有很大份量的實作練習；中研院則是發給我們很多的資料，讓我們彼此討論，。另建中（現為高雄大學助理教授）游森棚老師會定期出模考題，指導我們學習其中的技巧，讓我覺得很有收穫。

作模擬考的時候，常常碰到我覺得頗有難度，暴了很久的題目，被毛哥或道生用妙解做出來，尤其是毛哥的幾何功力簡直是打遍天下無敵手，看到他們的妙解，讓我感覺到數學奇妙的美，讚嘆學習之餘，我也建議他們多多練習暴力，畢竟每個人都有自己的風格，互相截長補短才是競賽的精神。

考前：

我因為有在台大修課，所以一直無法全力衝刺，直到考前三週結束了台大的課程，才開始全力準備。一開始感覺不如去年犀利，後來作了九章孫文先老師的大陸競賽題後，逐漸恢復往昔水平。

赴日：

六月三十一日晚上，所有人住進中研院，準備搭乘七月一日的飛機飛往日本。一到了日本成田機場，就遇到了教育部派來的黃先生，因為教育部的車太小，所以黃先生就帶我和道生坐計程車去我們下塌的飯店——京王廣場飯店。

我們居住的京王，是一家四星級的飯店，雖然是四星級，不過我覺得有五星級的水準，雖然房間有點小，但住起來很高級，飯店裡還有游泳池和健身房，隔離的時候一點都不無聊。

在隔離期間，教授為了避免我們的數學技巧生疏，同時讓我們提前適應考試的氣氛，特地安排了兩次模擬競試，考試地點就選在旅館的房間裡面，感覺得出來教授很用心。

考試：

七月十一日，我們終於進駐考試的地方——日本的青年活動中心；一到了那裡，我們頓時眼睛為之一亮，來自世界各地的選手齊聚一堂，讓人大開眼界。我們的導遊古曉融先生是高雄人，人很好，很照顧我們，當天就是他安排我們到自己的房間休息。

隔天的開幕典禮和往年一樣，重要人物講完話之後，每一隊輪流上台亮相，之後就草草結束，我想開幕典禮的精神意義怕重於實質意義，不過由於考試快到了，所以也沒有心情管那麼多。

考試前一天晚上，想起陳明揚學長說的話，把以前師大發的講義拿出來重新瀏覽一次，再把游森棚老師給的「小黑書」拿出來翻了一下，就提前睡覺了。

考試當天，因為前一晚有一點小小的失眠，躺到十二點才睡著（雖然十點半就睡了），所以精神有點不好，不過想到考試，心情一緊張，就什麼都忘了。

考試開始，我翻開大會提供的檔案夾，首先映入眼簾的是第二題的數論，接下來是第一題的組合和第三題的幾何，看完題目後我不禁暗爽，因為第一題的組合看起來不難，數論又是我的拿手領域，幾何一副可以用解析暴力出來的樣子，一邊作，一邊暗自竊喜，結果沒想到完全不是這麼一回事，首先第二題作了快一小時卻作不出來，轉攻第一題依然久攻不下，我頓時有點慌了手腳，這時候突然想起了陳明揚學長說的話：「一、二、四、五題考的一定是你會的東西，作不出來的時候就想想看你漏了什麼，答案就會出來了。」於是我便定下心來重新檢視第二題，我發現解的形式有好幾種，可見有可能要分好幾個情形討論，於是我便結合一開始得到的 a 的範圍進行討論，利用不等式，終於解決了第二題，這個時候約用了一小時四十分，作出了第二題之後，心理踏實了不少，仔細再看看第一題，發現我好像多考慮了一個集合，當下重新計算，得到了 999999 個元素，剛好比題目給的 1000000 少一個，

就很幸運的做出來了（事後才發現 1000000 可以少一倍，不過要用一點技巧，平凡的作就會像我的解法一樣，算出 999999 個元素），剩下最後的第三題，大概還有一小時，我一開始先把坐標設出來，因為中點和距離公式都很好表示，所以我覺得應該不難，沒想到展開之後有將近一百項，於是我被迫放棄解析，改用其他方法，可惜始終摸不著邊，就這樣渡過了空白的一小時。

出了考場，大家討論了一下，發現大家都作的不太好，跟去年相比，更是大退步，因此大家的心情都很沉重；發現我的第二題有一個解的 b 應該是偶數，我只有提到 b 是整數，很有可能被扣一分，結果緊張的連午餐都吃不下，晚餐也只吃一點點，到了約十點半就覺得很餓，又怕吃宵夜會影響睡眠，於是就和林金毅學長跟道生講了幾個冷笑話後上床睡覺，不過事後證明我是錯的，因為太餓了，所以一直躺到快一點才睡著，有夠慘。

隔天早上起來，有點精神不繼，可是一想到最後決戰就在眼前，兩年來的風風雨雨就要在此刻作一個了結，便狠下心，板起臉，走近考場，坐在座位上，像日本武士出征前一樣，醞釀一股殺氣……。話說我一翻開檔案夾，看到第四題幾何題，把圖畫出來之後，竟然發生了奇蹟——我把它「秒殺」了，這個時候就有點得意忘形，以為第五題也可以秒殺，作了一下發現不對，再仔細一想，想起第五題往往是一、二、四、五中最難的一題，一時間大腦一片空白，只好使用大絕招——上廁所，重新回到考場後，我重新分析了一下第五題的不等式，我發現我把左邊的絕對值去掉，再把兩邊的雙重Σ去掉之後，式子的右邊變的簡單又漂亮，左邊雖然對稱，卻很複雜，所以我就打算從左邊下手，再加上我以前有做過一題等號成立在所有變數是等差數列的題目，所以決定使用柯西不等式（那題就是用柯西不等式作的），結果雖然方向是對的，但是我一直配不出想要的形式，走了很多彎路，我一開始打算：

不訪設$X_1=0$

再利用

【$\Sigma^{n}_{i=1}$（$i-1$）X_i】$^2<=$【$\Sigma^{n}_{i=1}$（$i-1$）^{2}】×【$\Sigma^{n}_{i=1}$（$i-1$）X_i^2】

證出原不等式，等號自然成立在所有數為等差數列的時候，結果我的如意算盤打錯了，這樣做只會讓不等式更複雜，這時候覺得心灰意冷，只感覺題目很難，通常柯西不等式都用在正數的情形，這題一把變數設為正數，就變得很複雜，想著想著突然覺得好像似曾相識，好像去年在師大選國手的時候有用過柯西不等式對付負數，一想到這裡，我就把左邊直接套用柯西不等式，結果意外的發現右邊只多出了一項　－【Σni＝1Xi】2　，害我的不等式反向，於是我就老實不客氣的「不妨設Σni＝1Xi＝0」，辛辛苦苦的把這題做出來了。剩下一個半小時，我準備挑戰號稱終極大難題的第六題，今年的第六題外表平易近人，其實是披著羊皮的狼，我一下子就想到了初等數論上寫的一個定理，用它得到了一個看起來廢廢的結果，接下來就毫

無進展，晃呀晃，時間過得知很快，2003 IMO 考試就這樣結束了，走出考場頓時輕鬆了不少，我對自己說：「剩下全靠教授了。」

協調&遊玩：

考試一結束，教授們就把我們抓去討論我們在考試時所寫的答案，我在和教授討論之後，發現我的成績是 29－，也就是最高 29 分，只可能低，不可能高，又聽說今年題目較簡單，金牌線可能提高，我更緊張，想到第二題就覺得很後悔，要是因為小地方被扣分就太可惜了，只好請教授加油。

因為記掛成績，所以我們前兩天玩得不很盡興。

考完後第一天，主辦單位在青年活動中心安排了一些活動，像是寫書法、賣紀念品等。一聽到有書法，就像在海外遇到老朋友一樣，我們馬上趕到會場，結果看到一堆外國人歪七扭八的在寫「字」，不但筆順不對，寫法也不對，真是哭笑不得。

不過看到隔壁賣紀念品的地方，就令人不得不佩服日本人的生意頭腦，連考試用的檔案夾、導遊穿的大會提供的衣服都能拿來賣，真是敗給他們了。

下午我們去找大陸隊交流打牌，雖然他們牌技不怎麼樣，不過人倒是很風趣，一口北京片兒說的很輪轉，很有味道。

晚上我們去聽奇怪的爵士樂音樂會，因為是杏子演奏的，所以我就勉強去給他聽一下（？），聽起來還不錯，雖然我對爵士樂不太了解，但是看到周圍的人都一副很陶醉的樣子，應該很好聽。

隔天早上，我們被導遊古大哥帶到淺草去看廟會，就像電視劇常看到的，廟會十分的熱鬧，兩邊有著各式各樣的店家，賣很多有趣的東西。要進神社前有一個規矩，就是要先用聖香沖洗後再用聖水洗手（聖香？聖水？），在神社裡要祈福許願必須先丟一個五元銅板，象徵緣分。我們後來還去抽籤，結果大家都抽中大吉或吉，大家都很高興。

下午我們到台場參觀，結果在碼頭邊遇到了「早安少女組」的國小版，正在拍外景，雖然外表和聲音都很可愛，但是穿著和動作卻很花癡。後來我們到了一家名為「科學未來館」的地方，裡面有很多高科技的產物，像是無線傳輸之類，可惜我們只待了一小時就離開了。

晚上回到青年活動中心，大家就迫不及待的跑去看成績，大部分的國家成績都出來了，只剩台灣和土耳其，初步估計，金牌 29 分，銀牌 19 分，銅牌 14 分。到了晚上十點多最後的第二題終於出來了，傅教授特地把大家召集起來，慰勞大家的辛苦，這天晚上是幾天以來唯一沒有失眠的一天。

參觀活動的最後一站是迪士尼游樂園，我們一開始就拿到了 2500 元的餐券，一

開始以為很多，結果一到那裡才發現根本不夠，想吃好的還要自己貼錢，實在是……。

不過迪士尼真的很好玩，除了一點都不好笑的鬼屋，和一點都不無聊的維尼熊之外（我們足足排了 70 分鐘），其他都很好玩。

閉幕：

閉幕選在涉谷公會堂，一個硬體設備很好的地方。

我們一到涉谷，就感覺到戒備森嚴，因為聽說日本天皇的兒子，皇太子會蒞臨現場，實在是太令人興奮了！

進入會場坐定後，我發現我旁邊坐了一堆俄羅斯人，他們還要求我在他們上台時，幫他們拍照，不愧是俄羅斯人，講起英文頻頻吃螺絲，加上我的英文本來就不好，這種小事就講了十分鐘，我後來又花了十分鐘跟他們解釋我為什麼不能幫他們拍照，累死人了。

原本我以為皇太子也會站起來頒獎，沒想到他從頭到尾都坐在椅子上，只是對得獎者點點頭而已，雖然頒獎的時候，我旁邊站了羅馬尼亞和烏克蘭的美女，但是我還是期待能和皇太子握手，不過這個期待最後還是落空了，因為我根本無法接近他方圓五公尺的地方。

晚上的晚宴選在京王的餐廳，讓我們有一種回家的感覺。晚宴的菜雖然很豐盛，可是由於人太多，所以每道菜都一下子就被拿完了，尤其是肉類，簡直有如秋風掃落葉一般，我們還沒去排隊，就被拿完了，再加上大會又不補充，害我們只好吃素，有點懊惱！

晚上回到旅館，突然發現此行帶來的紀念品——「國筆」都忘了送給外國參賽選手，大家趕緊挑燈夜戰，挨家挨戶的發送國筆，結果不但把國筆發完，而且還換到了一堆物超所值的紀念品，又練習了好幾句英文，實在是太值得了！

我們在交換紀念品的時候還發生了一些有趣插曲，先是我們在電梯門口遇到了「仰」慕的白俄羅斯長腿大姐，就找了藉口和她握手，結果發現她背後的男生都在瞪我們；再來是遇到奇怪的日本導遊，喝醉酒拿了我們的國筆之後，就對我摟摟抱抱，嚇了我一大跳。

隨著閉幕典禮圓滿落幕，IMO2003 也跟著結束了，今年的 IMO 留下了很多特別又美好的回憶，這是我永遠忘不了的。

致謝：

首先要感謝我的導師游森棚老師兩年來的指導，從高一進建中以來，一直給予我很大的幫助，不論是學業或做人處世上，如今他已經要到高雄大學任教，祝福游

森棚老師教學愉快！

接下來要感謝中央研究院的傅承德教授，它是這次 IMO 台灣隊的領隊，從賽前的準備、選題，到賽後的協調成績，幾乎都是他一手包辦，非常的辛苦，在此致上最高的謝意。

再來是高雄大學的左太政教授、中央研究院的趙民德教授、新竹師院的洪文良教授，左教授是這次 IMO 的副領隊，趙教授和洪教授是觀察員，我們在日本隔離期間，全靠幾位幾位教授的照顧及指導，幸好有他們，我才能盡全力考試而無後顧之憂。

還要感謝李志豪教授、葉永南教授、陳　宏教授、張鎮華教授、全任重教授、林來居教授、黃文璋教授，他們在選訓營和培訓營對我的照顧，沒有你們我不會有今天。

最後要感謝建中的林明進老師、鄭炎活老師、藍金興老師、林志弘老師、孫蘭芳老師、黃春木老師、蔡玉琴老師、李大誠老師、簡健華老師在建中對我的指導。在培訓期間請了不少公假，我會努力補上。

謹將這份成就獻給我的家人、親人及所有幫助過我的人。尤其是我的媽媽，她一直是我的精神支柱。

後記：

今年游森棚老師（下稱教官）在高雄大學上圖論課的時候，說了一句經典明言——「這不是圖」，這句話原本是要把圖論上的圖和一般的圖作一個區別，沒想到竟然成為今年 IMO 國手之間最常說的笑話，但是我從第一次聽到這句話的時候就覺得不好笑，因此一直在納悶這句話到底哪裡好笑，經過我的觀察，每次都是黃道生先提起，接著林金毅學長就會一邊笑，一邊重複的說「這不是圖」，所以有一天，我就問毛哥這個問題，沒想到他也覺得不好笑，我們就再去問葉仲恆和廖紹棠，結果葉說不好笑，廖說好笑，所以結論就是，覺得好笑的人一直說，覺得不好笑的人一直附和著笑。

以上僅供參考。

第四十四屆 IMO 競賽心得報告

黃道生

第四十四屆 IMO in Japan 結束了，整個過程仍然歷歷在目。

一、選國手的準備

高一上第一次的數學專題課，看過倫哥(強者黃紹倫主席)輕鬆的解決全班都不會的難題之後，我決定要走 IMO 路線。

那時候，教官(游森棚老師)就已經幫我安排好了一連串的計劃。

高一上，讀完高中數學。之後開始看競賽的書。並不時的跟毛菇(趙心宇)切磋，交換心得。進步的很快。

高一升高二的暑假，終於讓我第一次讀完了完整的一本競賽書。那時候關於 IMO 的知識面已經很夠了，但是技巧跟經驗，以及看過的題目都不夠多，有很多不會的題目。那時候，IMO 對我而言仍是遙不可及的夢想。

高二剛開學，很幸運的考上了數學校隊，展開了長期的公假之旅。

教官發了一套系統性的題目，並且定期的進行模擬考，每天在學校我都跟毛菇、孟軒和學長(錫金、昌哥、峻豪)討問題目。大家有好的解法都會互相討論，每個人都吸取了別人的優點，那是進步很快的時候，讓我體會到了團結合作的重要性。

很順利地，在北市能力競賽全國能力競賽我們都有不錯的成績。

接著就到了選國手的第一個關鍵點——APMO。

那時候建中要考 APMO 的人數非常多，那時候大家一起集訓，一起考試，進步的更快了！人多就是力量阿！同時，倫哥也加入了集訓，更讓我知道我還有很長的路需要努力！

APMO 結束了，很遺憾的，一起奮鬥的同學許多都敗北了。也有許多高三的學長自己放棄了機會。

幸運留下的，進入了初選營。這些人是全國各地剩下的強手。從此以後，我不只能跟建中的同學交換心得，更可以與友校進行交流。這一段時間也是進步的一個關鍵。

很幸運的，我一路從初選營、一階培訓營、二階培訓營，當上了國手。

雖然當上了朋友，但是想到以後能討論題目的人變少了，覺得好可惜。

二、考 IMO 的準備

當上國手以後，我們就隨著中研院的步調開始努力，代表國家比賽，準備時格外緊張。

兩週一次的培訓營，考 10 題，上幾次課，發了許多講義。

教授看我們緊張，特別要我們放鬆心情，要我們別把國家民族的榮耀加在自己身上。

的確，幾次的培訓營教授們一面給我們訓練，一面要我們放鬆心情。

記得在高雄大學集訓的那次，教官給我們上圖論。首先，他就講了個笑話：

︵

〔⊕〕　這不是圖

︶

＼｜／ 這是一朵花

⊥

讓我們心情又輕鬆了不少。

就在我們心情輕鬆，但又努力上進的情況下，培訓營結束了。

我覺得我的實力又上了一層！

三、抵達日本

聽說由於 SARS 使台灣被列為疫區，所以我們必須先在非疫區呆十天才能進入大會。

我們到達的非疫區國家正式日本。

在這裡，我們住的是一家高級飯店，挺舒服。

但是，在日本人生地不熟，東西又很貴。總沒有家的感覺。

在日本我們又舉行了四次競賽實作，考了十二題。

這些題目的難度沒有按照 1 簡單，2 中等，3 暴難的 IMO 近年來難度分配考，而是每一題都很難。讓人無所是從。

不過，這幾次的考試在日本舉行，所以格外慎重。

四、進駐選手村

IMO 終於要開始了！

我們在高級飯店待了十天後，終於要進駐選手村了！

很期待看看世界各國的高手長什麼樣子。想看看大陸隊為什麼每年都那麼強！也很期待選手村是不是也很高級！

進入了房間之後，我才發現這個房間真是不怎麼高級，不用說比不上之前住的飯店，我覺得它也比不上中研院、台大、高雄大學。真是有點失望。

五、比賽

準備已久的比賽終於展開了！

我們六個人被分到六間不同的教室。教室裡除了我全是外國人，現場考試的氣氛是模擬競試完全比不上的。

看了試題以後三題都沒有想法。我想中研院真厲害，居然先預測到了這次 IMO 的難度是三題都很難，就往難的方向想，結果我一直在繞圈子，連一題都沒有做出來。出了試場跟大家討論以後我才知道我被題目唬了。其實第一題第二題都不難。真的是只有第三題暴難。心情十分失落。

好在第二天有發揮應有的實力，兩個小時就把第四第五題寫完了，其中第五題我似乎有看過類似題。花了兩個半小時想第六題還是只有一點點的部分結果。所以說，這次考得很不好。

不管了，開始玩吧！

六、大會安排的活動

大會安排的活動有：開幕，閉幕，書法，賣紀念品，Jazz，日本傳統舞蹈，日本傳統歌曲，聲樂，雜耍，體育活動，disney land，餞別晚宴等等。

其中最奸詐的是賣紀念品，早上一件衣服 1000YEN，到了晚上他發現賣不完了就改成 500YEN，讓我們早上買的人虧了一件衣服。真是奸詐，明明可以賣 500YEN 居然要賣 1000YEN。

書法是有趣的活動，很多外國人都不會寫書法，跟老師要了字帖以後就開始照著字帖畫畫。我們還在大會準備的大張紙上寫了"建國中學","這不是圖"等等的字。是個非常有氣質又很文雅的活動。

在餞別晚宴上我發現日本人的英文真的很差，Pork, Beef, Fish, Chicken 等等，全都是蔬菜。我從來沒想到日本人的英文能差到如此地步。

七、感謝

能體驗到 IMO 這種國際性交流活動，我要感謝辛苦指導我的教官，傅承德教授、左太政教授、洪文良教授、趙明德教授、葉永南教授、洪有情教授、全任重教授、朱亮儒教授、陳宏教授…，以及學校仁慈的老師們、辛苦的輔導員們，和一路陪我走過的朋友們。

當然，最要感謝的是辛苦養育我、教導我長大的爸爸、媽媽、爺爺和姊姊。

感謝所有指導過我、幫助過我的人，謝謝你們！

第四十四屆 IMO 心得報告

葉仲恆

前言

五個多月前，糊裡糊塗的從信溢那知道國內亞太奧林匹亞培訓營的訊息，一路到今夕，寫下回憶。

一、報名

一月時，無意間從信溢那得到了有關亞太的訊息，我們倆躍躍欲試。雖然其中打了許多次退堂鼓，但由於葉永南教授的鼓勵，我們也硬著頭皮把報名表送出去，心想能有機會和學長們同堂學習也是一件非常值得的事。

而後，教授們幫我們安排了一場和高雄大學黃文璋教授的 interview。或許是我們太過緊張，黃教授給我們的第一印象是嚴肅的。但在一、二小時之後，我們發現教授是和藹可親十分幽默的人。教授不但推薦我們，也給了我們許多箴言，使我們獲益良多，在此非常感謝黃文璋教授。

二、選拔和培訓

在選訓的過程中，見到了許多優秀的學長，自知何他們有很大的差距，況且學測也漸漸逼近，於是對每一階段的選訓營，都認為是國中最後一次能和學長、教授們學習的機會，要好好把握，之後就要回學校好好的讀書。最後和信溢都幸運的當上備取國手，心中也已經十分的歡喜，也總算告一段落。

教授們在培訓的過程中花了很多心力，為我們安培了許多的課程，使我們在數學競賽外，對數學有不同的認識。教授們也為我們安排了許多模擬競試，使我們能對 IMO 能更熟悉。

輔導員都非常的照顧我們，使我們在食住上都不必擔心，能全心全意的面對課程和考試。謝謝李怡璇助理、俞一唐大哥、魏聖安大哥、王仁和大哥、邱上展大哥、林士貴大哥、以及負責最多事務的黃明威助理。

在這期間認識了許多學長如：林金毅、翁書鈞、黃紹倫、黃道生、廖紹棠、趙心宇、李瑞榮、林繼民、歐陽奕、莫立平、張宇捷、周諭函。我從他們身上學到了許多東西，也要感謝他們沒有因為我們年紀較小，而對我們有所排斥。

和我同屆的信溢和政江，他們兩人的實力都遠高於我，要感謝他們在選訓營時和我在數學上相互切磋，生活上互相照顧，使我能幸運的有好的表現。

三、出國

剛考完學測的隔天，我和一群同學約好了要到雄中打球，有幾位同學先到我家來拿球。但傅教授的一通電話，卻讓我待在家裡。

李瑞榮學長放棄了，我要遞補他，出國比賽！

生活開始忙碌。

當天下午，我就趕緊把護照等東西找出來。往後的一個禮拜，都忙著打點出國所需的事務。

盼著、盼著，終於到了六月三十日。我和教授以及廖紹棠學長從高雄出發，到中研院何其他隊員會合。由於我們隔天一大早就要出發，雖然還在台灣，我們就和輔導員們及李志豪教授和家長們道了再見。

矇矇矓矓中，在中研院的一片鳥叫聲中醒來。梳洗打點之後，在活動中心門口拍下了此次行程的第一張照片後，我們就往中正機場出發。

飛機上，我們做了幾題 Balkan MO，三小時的旅程在這幾題的思考中轉眼而逝。放下筆時，驚覺已到了成田機場。

四、隔離

這是台灣參加 IMO 以來的第一回，因 SARS 之賜，我們必須到日本隔離十日。從機場出來，見到了黃秘書（他是中華民國駐日的代表之一，我們在日本受到他許多照顧），他帶我們到了往後十日的下塌處 KEIO PLAZA HOTEL。

一到飯店，我們立刻聯絡了早我們三日出發的傅教授和趙教授。往後的十天，教授為我們安排了兩次的的競賽實作。我們自己在考試之餘也勤加修練，希望在正式考試當時有好的表現。

五、開幕

結束了十天的隔離，我們進駐到大會。報到時，見到了許多不同國家的選手。由於聯絡上的問題，我們耽擱了一會才見到了我們的導遊古曉融大哥。他領我們到了房間，到此時心中才開始緊張起來。

七月十二日，是第四十四屆 IMO 的開幕典禮。我們全隊西裝革履，和其他國家的隊員一同進入了會場。

開幕典禮是非常隆重的，在一連串的表演中最令我印象深刻的是日本傳統的擊鼓表演。隨後是各隊上台 show 一下，雖然我們只上臺逛了一圈，然而有不少國家卻 show 出深具民族氣息的裝扮。

鼓聲又起，台下一片歡呼，我們看見領隊們從台上一個一個走過向我們揮手。我們也見到了傅教授和趙教授，大家隔著幾行座位，用力著揮著手。領隊們比我們早到了三日，雖只分別了三日，但所有的選手卻似和領隊多年不見，欣喜之情溢於言表。

六、競賽

考試的第一天，我在第一題上打轉了很久，但想出的解法卻是十分的簡潔明瞭。第二題是我最不擅長的數論，實際上並不是個難題，考試之後，經紹倫一指點馬上完成了在考試時未做完的部分。第三題原是我最擅長的幾何，但在前兩題已經花去我太多的時間，在這題上沒有太多的關照。

第二天，考卷一發下來，就看到了自己最擅長的幾何題，心中竊喜，小試了一會兒就作了出來。但也很慚愧，雖然秒殺了第四題，但往後的時間之中卻無法將第五題解出。考完試之後，我們見到了傅教授和趙教授，而趙教授的一句標準化，卻瞬間解開了第五題。

心理卻開始擔心，兩天六題我只做了兩題完整、兩個半題，以去年的標準來看，我只能拿到銅牌。對我而言這已經算很好的成績，但對台灣隊而言，每個隊員都應該要有拿銀牌的水平·

七、閉幕

考完試的後三天，大會為我們安排了國際交流日，東京旅遊以及迪士尼樂園·由於教授們正辛苦的為我們 coordinating，我的心倒也都繫在那兒。大夥也都如此，我們一有機會就衝去看公佈出來的成績。

台灣對今年的表現並不理想·和我同房的心宇學長還有紹棠學長，他們的實力都比我好很多，但都沒有表現出應有的水準。

閉幕完的晚會雖在高級飯店舉行，但人數過多，且很多人插隊，吃的也不怎麼好，但好在有杏花可賞（應該是可聽），增添不少趣味。

八、誌謝

感謝所有上過我們課的教授：傅承德教授、趙民德教授、左太政、洪文良教授、葉永南教授、鄭清水教授、鄭日新教授、周雲雄教授、李志豪教授、呂明光教授、張瑞吉教授、朱亮儒教授、朱緒鼎教授、黃文璋教授、吳鐵肩教授、陳宏教授、蔡宜洵教授、張海潮教授、全任重教授、游森棚教授。還有帶們出國的傅承德教授、趙民德教授、左太政、洪文良教授；傅承德教授身為我們的領隊，為我們譯題，在協調時為我們費盡口舌，非常的辛苦，又排除萬難幫我爭取到出國的機會，特別感謝他；黃文璋教授願意推薦我這個學生，讓我有機會參加，特別感謝他；葉永南教

授在培訓時幫我們上了很多課，讓我們增加很多實力。再一次感謝所有的教授。

感謝所有的輔導員：李怡璇助理、俞一唐大哥、魏聖安大哥、王仁和大哥、邱上展大哥、林士貴大哥、以及負責最多事務的黃明威助理。

感謝所有和我一起出國的隊友：林金毅學長、黃紹倫學長、黃道生學長、廖紹棠學長、趙心宇學長，在國外時不嫌麻煩的照顧我這個學弟。

感謝辛苦養育我的父母、奶奶、以及過世的爺爺和支持我的家人、朋友、師長。也感謝信溢，陪我一路走來，一同成長、學習，沒有和他一同切磋，我不可能有今天的成績，感謝信溢。

九、後記

今日雖有小小的成就，但未來的路還很長。高中、大學、研究所……，未來還有許許多多更深的學問，等著我學習。希望我今日銀牌是我學習的另一開始，今後以更謙卑的心面對浩瀚的學問。不光只是數學，對所有的科目都虛心學習、充實自己，許自己更美好的未來。

第四十四屆 IMO 心得報告

林金毅

簡記

嚴重急性呼吸道症候群(SARS)來勢洶洶，臺灣也在疫區之列，遂因應大會要求，在賽前在非疫區隔離十天。七月一日，搭飛機至日本，在新宿的京王廣場飯店進行隔離，同時也進行培訓。完畢，轉至奧林匹克紀念中心——世界各地的選手這幾天住的地方。十二日，在鼓聲隆隆中，第四十四屆 IMO 正式開幕。接連兩天，六道考題。考完討論後，覺得不妙；不久成績出來了，果然得銅牌。中間有參觀活動，先後是在中心看表演、東京四處逛、和迪士尼一日遊。十八日，閉幕典禮。翌日，便返國回家。

初選、選訓、和培訓

我在亞太數學競賽(APMO)表現並不是非常好——沒有在前十名內，但是還好也沒有太差，就讓我進了初選營。

初選營，雖然不叫選訓營，但是已經是國手選拔的開端，感覺就有點小緊張。題目下來，卻發現沒有想像中難，反而算容易。於是自信心便從此遞增，緊張的情緒便相對的遞減。不過到底結果如何，難說！

選訓營，基本上型式差不多。安排了一些專題演講，但是重點是在考試。算是很幸運的，在第一階段選訓營後就獲選為正選國手——這也就是要代表國家參加 IMO 的意思，雖然自己考試時覺得題目都答得不錯，但不免覺得意外，甚至是驚喜，可是壓力也隨之而來，因為從此就是一連串正式的訓練，更有真正個競試等著我們，而不光是模擬競試而已。

接下來我就進培訓營去了。不同於選訓營，在培訓營中果然有更多老師來演講教導我們，內容從幾何到數論、從不等式到鴿籠原理都有，更提供我們幾個國手間互相砥礪增強實力的方法，一方面讓我們在個人練習之餘，也能一起討論；一方面讓我們在防疫隔離的十天期間可以如此繼續訓練。喔，當然不能少的就是多次的模擬競試鍛鍊我們解題的能力。不過，這些題目就困難多了，對我來說，解不出來是常態，一次考三題要是解出一題就很好了。又不由得擔心起來——像這種程度要怎麼代表國家呢？所幸這些題目每一題都是 IMO 中最難和次難兩題(第三題和第六題)的水準，因此，沒什麼好擔心的。

隔離、隔離、再隔離

雖然實在不想去隔離，但是因為嚴重急性呼吸道症候群的緣故，大會堅持，不得已，只好早在七月一日就搭飛機趕去日本，又驅車到新宿的京王廣場飯店，並在那兒進行隔離。十天，好像不是很長，但其實在隔離期間很多事都不能做，生活無聊，這段時間便顯得長了許多。還好，我們還有很多數學題目可以演練及競賽書籍可以研讀。雖然賽前準備本屬應該，不過由於在進行隔離的緣故，這便成為除了如量體溫等瑣事外，少數有意思的活動。

教授們擔心我們十天隔離下來，不但數學荒廢了，連解題能力都退步了，所以不時安排模擬競試——反正本來在七月一日至七月四日就安排了第五階段培訓營，現在只不過是多六天而已，也差不多。不過，我們都一直在準備，實在不必要如此，但話說回來，一來解題練習也該是賽前準備的一部分，二來不時穿插的模擬競試也給單調無味的隔離生活加上一點色彩。

至於隔離，就算是一種經驗好了。

七月十一日終於隔離完了，前往奧林匹克紀念中心(我們都叫它 Center)去，看到了各國國手，個個莫測高深貌，有些可怕。

一題、一題、又一題

日本鼓、聲隆隆，第四十四屆 IMO 開幕了。各隊依序在舞臺上走一圈，我們也不例外，穿著西裝一面揮手一面走。那種情況下，我深深感覺到自己代表著臺灣來到這兒，參加一個國際性的大比賽，同時也意識到明天就要和現在就在臺下、來自全球各地數學最強的人一塊兒解題目——那就是 IMO。不知道是該覺得自己能前來參加而高興還是因為國家民族的壓力覺得緊張。在臺上的幾秒鐘，我的內心非常複雜。

只不過，無論如何，其實只要接下來兩天把題目好好寫一寫就好了。

比賽分兩天進行，一共有六道題目，一天寫三題，有四個小時又三十分鐘可以作答。

來日本十幾天，終於要比賽了。七月十三日，比賽第一天。

八點三十分，我就先去找位子，結果發現位子就在門邊，很好找。已經有不少選手來了。工作人員也忙進忙出，不久，每張桌子上都放了一個夾子，「DO NOT OPEN BEFORE INSTRUCTED TO DO SO.」第一頁如是警告著。

九點一到，比賽正式開始。我把題目從夾子中拿出來，仔細的閱讀，分別是一題組合、一題數論和一題幾何。看完了題目，心中暗叫不妙，怎麼每一題都那麼難，跟在隔離期間練習的那一些難題不相上下，那些不是第三題和第六題的水準嗎？經過一番思考和嘗試，總算把第一題完全作完，針對第二題、第三題兩題也有一點部

分結果。不過那時已經十二點多了，剩下的一個多小時絲毫沒有一點進展。

「不要讓今天的結果影響明天的表現。」——當天下午，教授這般叮嚀。

七月十四日，比賽第二天。

「DO NOT OPEN BEFORE INSTRUCTED TO DO SO.」第一頁仍然如是警告著。而和前一天一樣的，在九點時的一聲指示下，眾選手便迅速的拿出題目準備作答。我從夾子中拿出來的是一道幾何證明、一道不等式和一道數論題。在初步的嘗試後，我覺得第四題應該是最簡單的，第五題大概有機會作出來，而第六題毫無頭緒。不久，我就證完了第四題，正在高興時，一看時鐘，我傻眼了，原來不知不覺已經十二點啦！所以第五題已經差不多沒時間想了。觀察了一下特例，便開始證明了。最後也因為時間的關係，第五題寫得不好，第六題根本沒有動手。

現在的情況非常糟糕，唯一好的是，比賽結束了。

欣賞、參觀、出去玩

接下來的活動，就和之前很不一樣了。

首先是在 Center 裡欣賞大會安排的各色演出，有會走路的機器人——ASIMO 的演示、拿著扇子跳的日本傳統舞蹈也有合唱團和某音樂家庭的歌唱表演，還有爵士樂的現場演奏。其中 ASIMO 不但會走路還可以很順利的上下樓梯、轉彎、倒退，著實令人歎為觀止，留下很深的印象。

隔日由導遊帶領大家在東京四處參觀。我們早上搭乘地鐵到淺草寺去。在寺廟門口有一排攤位在賣各式各樣的紀念品，買了一些以後，又進到寺裡看看。下午又坐電車過大橋到台場——一座孤立在海中的人工島嶼，除了欣賞風景外，還去參觀日本科學未來館。這裡頭全是用科學原理產生的一些頗具未來感的遊戲，還滿好玩的。

十七日，大會安排我們去東京迪士尼樂園玩。我們去玩了不少設施，包括太空山、鬼屋、創意公司、星際旅遊、賽車、咖啡杯、小小世界、維尼採蜜、旋轉木馬、巨雷山，還有獨木舟。其中我覺得巨雷山——很刺激的雲霄飛車——最好玩。還看了城堡前二十週年的特別表演、遊行表演、五彩繽紛的煙火和燈光遊行。真是太有意思了！

七分？零分？或三分？

這時候教授們正努力的逐題和協調員協調成績，決定每個人每一題的分數。最後的結果在閉幕典禮的早上公佈了。我第一題和第四題全對，第二題的部分結果得到三分，其他題都沒有得分，共十七分，果然是銅牌。其他的人成績各不相同，但是大家都覺的自己表現得不夠好。

銅牌！銀牌！和金牌！

歐幾里得、高斯、黎曼、愛因斯坦先後出現，數學方程式和函數圖形飛來飛去，第四十四屆 IMO 閉幕典禮就此開始！先有致詞，然後在日本太子的見證下，我拿到了一塊沉甸甸銅牌。「Congratulations！」司儀用甜美的聲音賀道，但我的心裡卻如這面毫無光澤的銅牌沉甸甸的。收起來吧！等會就要前往京王廣場飯店參加晚宴了。

這是晚宴辦的不錯，不但燈光美、氣氛佳，更重要的，食物也好吃，讓我們大快朵頤一番，吃飽了還有音樂表演助興，實在過癮。

回家！萬歲！

七月十九日早餐後，搭車到成田機場，搭飛機回桃園中正機場，再搭車回家。在國外待二十天，終於回到家了，萬歲！

後話

第四十四屆 IMO 將是我一生中難得的寶貴經驗，西元二零零三年七月一日至七月十九日將是此生中特別的十九個日子，儘管結果差強人意，但是我在此仍對所有指導過我的老師、教授們、支持我的朋友、辛苦養我教我的父母和家人致上十二萬分的謝意，謝謝大家！

第四十四屆 IMO 競賽心得報告

趙心宇

前言

自從升上高一，我就打算參加數學競賽這項活動，主因很簡單：因為我其他科目不好，又對數學有興趣。很幸運的一路上碰到許多老師、教授、出版社老闆以及志同道合的同學，讓我有機會參加今年在日本舉辦的四十四屆國際數學奧林匹亞競賽。

選訓培訓

我今年是第一次參加亞太數學營，從八十多人到六人，從吵吵鬧鬧到氣氛緊張，亞太、零階、一階、二階，非常幸運可以體驗一路過關的特別經驗。

今年是由中研院主辦國手的選拔，住宿十分的豪華舒適，讓大家再辛苦力拼之餘，可以舒緩情緒、調適身心，實在非常的感謝中研院!在選訓期間，有許多的教授都會來指導我們上課，讓我們更加充實。在學校時，游森棚老師給我們許許多多的資料來參考以及各國國內的選拔題目來做練習，讓我們的實作面以及知識面都有許多增長。

因煞隔離

基於流行疾病煞斯的蔓延，我們被日本 IMO 大會要求隔離，簡單的說就是提前十天到日本去，雖然心中有許許多多無奈，也只好把這十天當作儲備戰力時機罷了。七月一日早晨，六位國手，加上左教授以及洪教授，從中央研究院向中正機場出發，前往未知的國度。短短的幾小時，我們到達了日本，由一位黃先生帶領我們到下榻的飯店，與傅教授、趙教授碰面。我們住宿的飯店-京王大飯店位於新宿，四處都是高樓大廈，算是熱鬧的地區。

在這十天中，教授們給了我們兩次的模擬測驗，外加一次的小考，總共五天的培訓時段，其他的五天之中，大家也沒閒著，討論游森棚教官在出發前發下的錦囊，是前幾年美國選訓的題目，或是看看考古題，基本上大家都很充裕的利用這些時間。隔離的幾天，我們的早午晚餐都吃的很好，非常感謝教育部給的經費，及隨行教授的照顧。。

競賽

隔離結束，入了大會，住宿變差了，這也讓大家更有戰鬥的感覺。各個膚色的選手，操著陌生的語言，來來往往，唯一讓人親切的是大陸隊、香港隊以及馬來西

亞隊的隊員，還有美國隊、南非隊的華人，大家可以用華語溝通。開幕式時，各個國家分別上台讓大家認識認識，共有近八十多個國家，讓人看得目不暇給，還有些國家的隊員披上國旗展現非凡的氣勢。我們的選手穿上西裝上台，但是整體感覺不大搭調，大陸隊員統一穿著訂做的運動衫及夾克，感覺有朝氣，建議明年可以以此作為參考。

競賽的首日，大家都很緊張。我的座位位在教室的後方，大家的一舉一動一目了然。發下題目來，發現有點不大對頭，竟然絲毫沒有親切感，拼了老命作出了第一題(第一題通常是容易的)，剩下不到一半的時間，最後時間結束時第二題還差一點，到了宿舍把整題想完整了，但也只拿到部分的分數。第三題則是一碰也沒碰。第二天的幾何題非常容易，第五題則是很醜陋的題目，我一開始走錯太多路，完全沒有想到柯西不等式，最後還因為筆誤以為自己做出了第五題，結果只有一分。第六題是有作一點點但是不足以拿到一分，這是我最窩囊的一件事，在出發之前老師的叮嚀是要攻上三六題，但我連二五都保不住，實在慚愧。

最後幾天，大會安排我們參觀日本許多地方，以及到迪士尼樂園遊玩，讓大家的心情放鬆許多。也安排了讓大家交流的日子，認識了很多朋友。當我們在玩樂時，教授們正在辛苦的幫我們爭取分數，大家也都默默的幫教授加油，我們台灣的分數是最後一個出來的，由此可知教授多麼辛苦與盡力，真是又感激又抱歉。最後我拿到銅牌，實在很不理想，台灣今年的成績也下滑了，真對不起國家。不過這次的經驗實在難得，讓我學到非常多，也讓我與很多其他國家的人交流、分享經驗。

結語

這次的成績實在不理想，是自己不爭氣。最後要感謝教育部、中研院給我這個機會，更感謝傅承德教授、趙民德教授、左太政教授、洪文良教授幫我們與日本的協調員協調分數以及在日本時的照料，感謝古小龍學長在日本作我們的嚮導帶著我們走訪四處，感謝在台大、高雄大學、中研院指導我們上過課的教授們讓我們吸收了很多新知，感謝我在台大的指導教授張鎮華教授給我很多方面的指導，感謝建中的各科老師們的通融讓我有時間全力準備數學、建中特教組的老師們每天受我們的打擾、九章出版社的孫老闆提供我非常多參考書籍與折扣，感謝高雄大學、台大、中研院的輔導員們在我們選訓培訓時生活上的照料，感謝建中的同學學長學弟讓我由討論學得很多，感謝我的父母親和親朋好友給我鼓勵，感謝李威、阿騙得同學來中正機場接機，明年換我去接他們。最後要感謝建中的游森棚教官兼高雄大學應數系助理教授給予我長達兩年的生活和數學指導。要感謝的人太多了，就感謝天吧！

第四十四屆 IMO 心得報告

廖紹棠

一、緣起

猶記得去年，感謝學校推薦使我在高一就進入亞太奧數培訓營，初窺奧林匹亞數學競賽的殿堂，感覺到身邊都是深不可測的高手，自己卻是少不經事的小毛頭。雖然在初選營就被淘汰掉，但那種與題目奮戰不休的感覺、解出難題的快樂，以及高手們所給我的啟迪，都是極為美好的回憶。因此我在鎩羽而歸後回程的火車上，與一位自幼相識就讀新竹實驗中學的學長相約，明年一定要在選訓營相見，並且一同當上國手！

二、備戰

在接下來的半年中，我讀了不少競賽書籍，努力增強自己在競賽數學上的能力，尤其是自己頗感興趣的組合及數論，做起題目來更是樂此不疲，當我的作答比正確解答還好時，更有一種另闢蹊徑的樂趣。而自己較弱的幾何，由於本性疏懶，卻是幾乎置之不理，僅僅把基本的一些定理看過記熟了就拋開。雖然短期間看不到此練習方式的缺陷，但是長期下來終於造成難以彌補的遺憾，然而此為後話，在此先擱下不表。

開學不久之後參加雄中校內賽，我竟然是最後一名”滑壘”錄取校隊，因此我持續利用公假及課餘時間好好與其他隊員們一起切磋討論，最後終於在高雄市市賽扳回一城，獲得高市代表權參加全國賽。原本在每年的這個時候，學校的蘇源森老師就會開始對我們加以集訓，深入指導我們，還提供一些很有用的競賽書供我們查考閱讀。然而今年他是高三的導師而無暇分身，學校竟然也沒有請別的老師來集訓，我們這些選手就只好孤軍奮戰了。所幸大半年的努力沒白費，在今年二月的全國賽時我得到了二等獎，已經比我原先的預估名次為高（第五）。然而我知道這些比賽都只是”以戰養戰”，真正的重頭戲尚未揭幕...

三、選訓

在亞太奧數競賽的前夕，我得知實中的學長放棄數學去考物理，卻以些微差距遭到淘汰的事情，也不禁心裡有些惆悵，然而也更激發了自己的鬥志。三月十七日，與雄中的舊生夥伴們一同來到今年的培訓營所在地──中研院，一開始就見到了今年新加入的新生們，個個朝氣蓬勃，有些更是國小就嶄露頭角、名揚”數”林，也不禁提醒自己明天一定要全力以赴，否則在亞太奧數比完就要跟這個賽季說再見了！

隔天，大略看完試題後便心中大定，前三題應可輕鬆解決，剩餘的時間就來拼

第四第五兩題吧！果不其然，前三題在兩小時內就作完了，第五題完全沒有想法，因此剩下來的時間都在拼第四題。沒想到天不從人願，交卷的鐘聲響起，我也才解了一半，不禁惴惴不安起來。出了考場才發現原來前三題分別都有一些人沒做出來，此時我也感覺到每個人都有自己適合的題目類型，無須以己度人，把自己弄得緊張兮兮的。

兩週後成績出來，我以前十名進入初選營，當時真是驚訝萬分，看來大家分數都很集中吧！進入初選營發現中研院辦的選訓營風格果然迥異於去年的台灣師大，以前台師大上課都不離競賽數學範疇，以引導式居多；而中研院教授的上課則間錯著一些大學的專題或是演講，還增設了晚上的診斷與輔導。雖然十分多元，但也使大家疲憊些，或許教授們覺得總比我們窩在宿舍打牌好吧！這次的試題還算容易，而且我用純幾何作出一題用此法不太好做的題目，當時就自以為是起來，覺得自己的幾何實力已經差強人意了，殊不知這已經為以後的失敗埋下引線…

第一階段時，前國手黃紹倫也加入了集訓，使的大家更戰戰兢兢起來。可是我在獨立研究就遇到前所未有的挫折──以往只要完整解出的題目就一定正確，但這次卻有一題花了快兩個小時寫卻是幾乎全錯，也使我以後答題更加謹慎起來。到了第一天競試，第一題組合我就栽了跟斗，花了兩小時多才解出；另外兩題更是毫無進展，直到收卷仍只有零碎結果。聽到大家興高采烈的討論，我不禁垂頭喪氣，只好把希望都寄託在明天的三題。第二天，我抱著破釜沉舟的心情上場應試，與亞太的感覺很類似，除了第二題的第二小題外，其餘我一開始就有靈感，一下子就寫完了一半。但好景不常，到了考試兩小時後我突然發現第一題我把歐拉線的定義搞錯了，簡直擺了個大烏龍。第三題的證明也有缺陷！我一呆，考試時間快過了一半，答案卷上只有一小題是對的！心急如焚的我提醒自己不要慌，重新審視題目思考，結果第一題終於用曾經背過的歐拉定理解出（真是敗也歐拉，成也歐拉），第三題直接硬算後也幸運得證。看看手錶，不多不少還剩十分鐘，我把第二題的第二小題部分結果及臆測的答案迅速寫上後恰好鐘響，令人驚喜的是我猜的答案與部份過程竟然是對的，因此在這天考試將近滿分，心中也放下了大石頭。

幾天後網路上公佈黃紹倫及林金毅學長已優先獲選為國手，雄中只剩下我一名選手孤軍奮戰，遙想前兩屆四位學長的光榮戰史，加上只剩四席名額了，我也提醒自己一定要全力以赴。這次沒有晚上的課程，大家有更多的時間自習作題目。然而模擬競試考完，大家都作的比以前不理想，可能是這次題目偏難吧！尤其是我，兩題幾何都沒做出來，反而作出十分冷門的一題數論及另一題組合數論，口試兩題也都作的不完整，想想應該還是要跟ＩＭＯ道別了。公佈成績的當天，我也沒特別注意，想說聽天由命吧！猶記是第三節課上到一半，數學老師突然衝進來宣布：大家恭喜廖紹棠同學，他當選了今年的國手！我不敢相信自己的耳朵，直到見到螢幕前自己的名字出現在國手名單中，才雀躍三尺。感謝上天的眷顧，我終於能參加這屆的數學奧林匹亞競賽了。

四、國手培訓

或許是完成階段性任務後的失重感，縱使提醒自己世界賽只剩下兩個多月，接下來的幾天依然失去了作數學的動力，渾渾噩噩直到第一次選訓營的來到。到了第一次選訓營，教授更具體的針對國手們的優點及缺點加以訓練，也給我們有更多的時間可以練習及相互請益。然而我幾何的實力仍積弱不振，在四次的選訓營中幾何題全數掛零，也使自己有些心灰意冷，痛悔當時的基礎不紮實。所幸其他項目表現尚可，隊友也會適時的給我鼓勵，使得我一路走來並不太辛苦。然而在最後一次選訓營，令人感傷的事發生了——由於我國ＳＡＲＳ疫情使選手需赴日隔離，導致李瑞榮學長隔離與聯考時間衝突，再魚與熊掌不得兼的情形下必須忍痛放棄參加ＩＭＯ。失去了如此一位穩重和氣的對有令人感傷，不過新加進來的學弟——以國三生之姿成為遞補國手的葉仲恆，也使我們的團隊有股新的力量。尤其幾何是他的強項，他也不吝惜把許多好書借我參閱，令我十分感激。經過四次集訓後，試題及成績雖仍在未定之天，但是該有的知識已經具備，是該揚帆的時候了...

五、隔離期間

六月三十日晚上，我們這些選手及教授們在中研院會齊，隔天就搭機前往日本。一下飛機感覺真是不一樣，雖然仍可看到不少漢字，不過我可是首度到達不說華文的國家呢！搭上了專車，前往下榻的新宿京王飯店。望見車子以極高的速度呼嘯而過，四周的大樓如櫛次鱗比，似乎向我們這些初次造訪的旅人炫示這首善之都的繁榮與先進。住進十分舒適的飯店後，就開始了我們為期十天的隔離。

在這十天裡，隔離並未帶來太多不便，雖然教授給我們在飯店房間裡模擬競試時，會有種失去臨場感的感覺，不過大致上作答情形也還差強人意。這次教授的訓練方針，是加強我們以往最弱的第三、第六題（也就是難題）。不過可能是取材自數年前，感覺上難度比這兩三年的題目為低，今年遇到的考題難度究竟又是如何呢？管它的，現在杞人憂天也沒用。我們利用閒暇時間作最後衝刺，除了比拼速度，良好的書寫品質也是不可或缺的。時間就在大夥兒的討論聲及紙筆產生的沙沙聲中悄悄地流逝，我們蓄勢待發，準備迎接最終的挑戰...

六、開幕及競賽

七月十一日我們抵達大會，第一次見到這麼多國家的選手們共聚一堂，感覺自然是十分新鮮有趣。大多數的人看起來很友善，不過有的選手看起來目光灼灼且帶著敵意，令人不寒而慄呀！不過等了半天，我們的導遊怎麼沒有出現呢？原來主辦單位竟然通知他到機場等我們，真是奇哉怪也。後來大家見面互相介紹後才發現，導遊竟然是我雄中的學長呢！到了宿舍，住慣高級飯店的我們立刻感覺到住宿有如天差地遠，不過想想自己是來比賽又不是來渡假，心中也就釋然。

七月十二日是開幕式，地主國日本用傳統藝術作開場，給了大家不錯的視覺及

聽覺饗宴。在主席等人致詞後，就輪到各國代表上台了。選手們有些不拘泥於形式，用別出心裁的方式出場，體現出自己國家的特色，往往使大家為之一亮，掌聲不斷自是不在話下。不過我們也不敢有揮著台灣國旗之類的舉動，因此指示中規中矩的上台致意，不過當全場目光注視著我們，難免大家還是有些靦腆，因此腳程似乎也快的多，幾乎足不點地的通過台上呢！

當天晚上，我們十點半就熄燈就寢了，然而大家都緊張的輾轉反側，聊了一下天舒緩彼此的情緒後才入睡。半夜時我突然醒來，發現棉被掉了急著撿，整個人竟然從床上掉下來，後半夜就睡的不太好。第一天競賽，一拿到題目心情還不錯，因為討厭的幾何放在第三題，應該其他人也作的不好吧！沒想到我一作前二題就傻掉了，因為幾乎沒有想法，更糟糕的是——我竟然昏昏欲睡，急忙出去洗個臉再進來作答。然而頹勢難挽，精神狀態不佳下（即使表面上足足睡了八小時），連最拿手的組合（第一題）及數論（第二題）也一籌莫展，最後半小時終於數論有一些頭緒，連忙寫了一些算式及似是而非的結論直到考試結束。出來我們六個討論之下，發現大家都考的不盡理想，我更發現我第二題的推論可能錯了，導致答案與正解大相逕庭。百思不得其解的我也只好作罷，看來也只能孤注一擲，祈禱隔天有驚人的逆轉秀了。

這天晚上我們在差不多時間入睡，或許是太緊張吧，作了些怪夢後我在半夜又醒來，幸虧沒有發生前夜的蠢事。隔天醒來雖然沒有精神不濟，不過也沒啥力氣的感覺。一看到第二天的試題就心慌意亂起來，因為最簡單的第四題正是幾何。別無選擇的我也只好做做看，然而沒有什麼有用的思路可言。十分鐘後我就毅然決然作了一個荒謬的決定——全力拼第五題，如果沒做出來就全盤皆輸（搞不好總成績還是顆蛋），有的話至少還有榮譽獎。接著我就開始想這題不等式，一開始我就覺得這題用科西不等式就可以作，然而卻一直想不出係數要怎麼配（若可輕易想出也不會放在第五題了），只好退而求其次先證明”此數列為等差數列時，不等式等號成立”，然而這是第二小題的一半而已，證出來說不定一分都沒有呀！我猶豫了一下去想了想第四、第六兩題，依然是無從入手，只好乖乖的回到第五題證出該“小小題”。

證完時考試已經過了兩小時半了，我決定一本初衷，把時間都砸在第五題上。過了一個小時，我已緊張的上了好幾次廁所、洗了好幾把臉，也用了好幾種方法，快十張計算紙在第五題上，依然沒有具體結果。此時已經黔驢技窮，想不出新方法的我已接近心灰意冷，只好又回到”配係數的柯西不等式”這條老路上。一邊整理計算紙的我，突然發現證明”此數列為等差數列時，不等式等號成立”時用的恆等式一些係數跟我試出的係數好像有相關性，因此我試著把不等式右邊的數表示成這些係數的和，代入發現竟然符合！雖然只是一題，但對絕望的我已是莫大的恩惠，因此我迫不及待的趕快把結果寫下來，寫完後發現與第一階段第二試一樣，又是剩下十分鐘。然而這次都是證明題，也無從猜答案，因此我把第五題計算過程仔細檢

答了一番，直到整個考試結束。

出了考場首先遇到一位美國籍的華裔選手，就跟他聊起今天的試題，他告訴我第四題比較好作，用梅涅勞斯定理即可。我一怔”這麼簡單？”不久後遇到其他隊友，即使做法各有不同，但有四位一下子就作完了，學長花了些時間後也有做出來。這時我已後悔莫及，只能靜待奇蹟的發生了（第一天前二題的部分分數順利拿到）。

七、旅遊及閉幕

第一天是”國際交流日”，揮別沉到谷底的情緒，看看今天的行程選擇：看機器人、玩球類運動、聽爵士樂團表演、書法展示...真是五花八門呀！我們早上先捉對廝殺桌球，下午在橋牌項目與大陸隊一較高下（比賽大敗自然不在話下，橋牌恐怕也是略遜一籌），到了晚上我們去欣賞爵士樂表演，彈鋼琴的還曾經拿過ＩＭＯ金牌呢！

第二天由導遊安排行程，首先我們到淺草寺參拜，也逛了逛他們的商品街，當然也應景地買了御守祈求保佑。由於這是附近著名景點，

不時還看到其他ＩＭＯ隊迎面而來，頗有“他鄉遇故知”的感覺。到了下午我們乘車前往科學未來館，那邊有許多科學介紹及先進的科技展示。我印象最深刻的是一種模擬賽車的機器，它可以用韁繩、杯子、甚至電子琴按鍵來操控物體的前進，既新鮮又有臨場感。

回到會場才知道成績大略已全部開出，分數與想像相去不遠，第五題有全對，如此我也心滿意足了，畢竟是自己考差，再怨天尤人也沒用。不過心宇同學在第五題意外丟分，使得他心情低落，大家就互相安慰彼此打氣度過了這一晚。

第三天全員都來到迪士尼樂園遊玩，我們一進園區就衝往著名的太空山，不過膽小的我卻一直有些惴惴不安，大家就常在經過“逃出口”時叫我趕快逃，不過我還是硬著頭皮坐上去。坐完之後才發現根本沒有想像中的恐怖，而且我像個縮頭烏龜似的縮在座位上，實在不能體驗其超速快感。因此趁著大家還要再坐一次，我把握機會好好體驗了這項遊樂設施。吃過飯後大家又陸續玩了幾項遊樂設施，不過這畢竟是迪士尼，不會有太多驚險刺激的設施，就我而言只有 splash

mountain 比較令人難忘，有點類似六福村的火山歷險，不過因為有一次驟降是在一片漆黑下進行，因此也驚險許多。

到了晚上有些隊友還興致勃勃的要玩另一樣最新的熱門設施，我因為有些累了就自己去逛逛紀念品店。由於是東京迪士尼二十週年紀念，因此有不少花車遊行，晚上還有煙火施放，真是令人目不暇給。這冗長但有趣的迪士尼之行就這樣畫下了句點。

到了十八號早上整理完行李後，閉幕典禮就正式揭幕，我坐在後面的席位望著大家一一上台，用快門一一紀錄下大家的英姿，也自許明年自己也要站在獎台上！令人驚訝的是日本皇太子也來觀禮致詞，其溫文的談吐令人印象深刻，還有大會主席演講到一半還激動落淚，可以想見他對這次競賽活動的投入與用心。晚上的晚宴是採自助式的方式用餐，無奈人數太多，佳餚均以風捲殘雲之勢被橫掃一空，我們只好把每到菜旁邊點綴的蔬果綴成一盤，來點另類饗宴。

老掉牙的那句"天下沒有不散的筵席"言猶在耳，大家已經互相話別，搭機向著返鄉的旅途前進，無論如何，這次ＩＭＯ依舊是豐富而令人永難忘懷得一次經驗，大家一起歡笑、難過，也有著對數學的執著。明年四十五屆希臘 IMO，"I'll be back!"

八、致謝

這次比賽從準備到結束，經歷了一段既艱辛又豐富的過程，如今想來往事仍歷歷在目。能有這次參賽機會，首先我要感謝自己的母親，沒有她含辛茹苦獨力將我撫養長大，並且尊重我自己依興趣發展，我絕對沒有辦法與能力參與這些競賽。接著要感謝雄中的蘇源森老師及朱林銘老師，前者不遺餘力的培植我們，即使今年沒有太多時間參與訓練，但一年級時使我們基礎紮實，功不可沒；後者在教導班上數學之外，也給我許多自由的空間，使我課業競賽能不偏廢。還有班上其他科的老師，能夠體諒支持我，讓我沒有後顧之憂的準備比賽。

接著我要感謝這次辛勤教導我們的教授群們：尤其是傅領隊，繁忙於指導選手及試務處理之間；還有左教授，除了從旁協助之外，也在我考的不盡如人意時，給我最大的支持與鼓勵；洪教授趙教授也以觀察員的身分，幫助我們許多。忙碌的輔導員們，也是這次競賽中不可或缺的角色，大家辛苦了！

最後，我要把今年這些微的成果，獻給我在天上長眠的父親。〔很抱歉兒子這次讓你失望了，我明年會好好努力，以不負你在天之靈。〕

附錄一

二○○四年國際數學奧林匹亞競賽預定行程表

第四十五屆國際數學奧林匹亞競賽預定行程

2004 45th International Mathematical Olympiad Program overview

二OO四年七月 希臘 雅典

Athens, Greece July 2004

4 July, Sun.	Members of IMO Advisory Board Arrival		
5 July, Mon.	IMO A.B. Meetings		
	Leaders	Deputies	Students
6 July, Tues.	Arrival		
7 July, Wed.	Jury Meetings		
8 July, Th.	Jury Meetings		
9 July, Fr.	Jury Meetings	Arrival	
10 July, Sat.	Jury Meetings	Excursion Free Time	
11 July, Sun.	Jury Meetings Move to Athens end Return	Excursion	Rest and Campus Activities Opening Ceremony
12 July, Mon.	Jury Meetings	Excursion Free Time	First Day of Contest
13 July, Tues.	Jury Meetings Move to Athens	Free Time	Second day of Contest Move to Coordination Site
14 July, Wed.	Coordination		Excursion
15 July, Th.	Coordination		Excursion
16 July, Fr.	Daily Excursion Evening: Final Jury Meeting		
17 July, Sat.	Free Time Awarding/ Closing Ceremony/ Farewell Banquet		
18 July, Sun.	Departure		

附錄二

2003 年第 44 屆國際數學奧林匹亞英文試題與解答

DAY 1　　Problem Form

IMO 2003 JAPAN

Country Number: ________

Country Code: ________

Chinese Version (Taipei)

第一天

東京, 2003 年 7 月 13 日

第一題:　令 $S = \{1, 2, \cdots, 1000000\}$, 而 A 是一個恰有 101 個元素的 S 的子集合。試證, 在 S 中存在著 $t_1, t_2, \cdots, t_{100}$ 使得下面的這些集合

$$A_j = \{x + t_j \mid x \in A\}, \quad j = 1, 2, \cdots, 100$$

任何相異的兩個都不相交。

第二題:　求所有能使

$$\frac{a^2}{2ab^2 - b^3 + 1}$$

成爲正整數的正整數對 (a, b)。

第三題:　凸六邊形的任何兩個對邊都有下面的性質: 兩對邊中點間的距離恰等於這兩個對邊長的和的 $\sqrt{3}/2$ 倍。試證這六邊形的所有內角都相等。
(一個凸六邊形 $ABCDEF$ 有三組對邊: AB 和 DE; BC 和 EF; 以及 CD 和 FA。)

考試時間 4.5 小時
每題 7 分

DAY 2 Problem Form

IMO 2003 JAPAN

Country Number: ________

Country Code: ________

Chinese Version (Taipei)

第二天

東京, 2003 年 7 月 14 日

第四題: 設 $ABCD$ 爲一個圓內接四邊形, 自點 D 向直線 BC, CA 和 AB 做垂線, 設垂足分別爲 P, Q 和 R。試證 $PQ = QR$ 的充分必要條件是: $\angle ABC$ 的分角線、$\angle ADC$ 的分角線和 AC 這三線交於一點。

第五題: 設 n 爲一個正整數且 $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n$ 均爲實數。

(1) 試證

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|x_i - x_j|\right)^2 \leq \frac{2(n^2-1)}{3}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(x_i - x_j)^2.$$

(2) 證明上式中等號成立的充分必要條件是 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 爲一個等差序列。

第六題: 設 p 爲一個質數。試證: 存在一個質數 q, 使得對所有的整數 n, $n^p - p$ 都不能被 q 整除。

考試時間 4.5 小時

每題 7 分

Combinatorics

C1. Let A be a 101-element subset of the set $S = \{1, 2, \ldots, 1000000\}$. Prove that there exist numbers $t_1, t_2, \ldots, t_{100}$ in S such that the sets

$$A_j = \{x + t_j \mid x \in A\}, \qquad j = 1, 2, \ldots, 100$$

are pairwise disjoint.

Solution 1. Consider the set $D = \{x - y \mid x, y \in A\}$. There are at most $101 \times 100 + 1 = 10101$ elements in D. Two sets $A + t_i$ and $A + t_j$ have nonempty intersection if and only if $t_i - t_j$ is in D. So we need to choose the 100 elements in such a way that we do not use a difference from D.

Now select these elements by induction. Choose one element arbitrarily. Assume that k elements, $k \leq 99$, are already chosen. An element x that is already chosen prevents us from selecting any element from the set $x + D$. Thus after k elements are chosen, at most $10101k \leq 999999$ elements are forbidden. Hence we can select one more element.

Comment. The size $|S| = 10^6$ is unnecessarily large. The following statement is true:

> If A is a k-element subset of $S = \{1, \ldots, n\}$ and m is a positive integer such that $n > (m-1)\left(\binom{k}{2} + 1\right)$, then there exist $t_1, \ldots, t_m \in S$ such that the sets $A_j = \{x + t_j \mid x \in A\}$, $j = 1, \ldots, m$ are pairwise disjoint.

Solution 2. We give a solution to the generalised version.

Consider the set $B = \left\{|x - y| \mid x, y \in A\right\}$. Clearly, $|B| \leq \binom{k}{2} + 1$.

It suffices to prove that there exist $t_1, \ldots, t_m \in S$ such that $|t_i - t_j| \notin B$ for every distinct i and j. We will select $t_1, \ldots, t_m$ inductively.

Choose 1 as t_1, and consider the set $C_1 = S \setminus (B + t_1)$. Then we have $|C_1| \geq n - \left(\binom{k}{2} + 1\right) > (m-2)\left(\binom{k}{2} + 1\right)$.

For $1 \leq i < m$, suppose that $t_1, \ldots, t_i$ and C_i are already defined and that $|C_i| > (m - i - 1)\left(\binom{k}{2} + 1\right) \geq 0$. Choose the least element in C_i as t_{i+1} and consider the set $C_{i+1} = C_i \setminus (B + t_{i+1})$. Then

$$|C_{i+1}| \geq |C_i| - \left(\binom{k}{2} + 1\right) > (m - i - 2)\left(\binom{k}{2} + 1\right) \geq 0.$$

Clearly, $t_1, \ldots, t_m$ satisfy the desired condition.

N3. Determine all pairs of positive integers (a, b) such that

$$\frac{a^2}{2ab^2 - b^3 + 1}$$

is a positive integer.

Solution. Let (a, b) be a pair of positive integers satisfying the condition. Because $k = a^2/(2ab^2 - b^3 + 1) > 0$, we have $2ab^2 - b^3 + 1 > 0$, $a > b/2 - 1/2b^2$, and hence $a \geq b/2$. Using this, we infer from $k \geq 1$, or $a^2 \geq b^2(2a - b) + 1$, that $a^2 > b^2(2a - b) \geq 0$. Hence

$$a > b \quad \text{or} \quad 2a = b. \tag{$*$}$$

Now consider the two solutions a_1, a_2 to the equation

$$a^2 - 2kb^2a + k(b^3 - 1) = 0 \tag{$\sharp$}$$

for fixed positive integers k and b, and assume that one of them is an integer. Then the other is also an integer because $a_1 + a_2 = 2kb^2$. We may assume that $a_1 \geq a_2$, and we have $a_1 \geq kb^2 > 0$. Furthermore, since $a_1a_2 = k(b^3 - 1)$, we get

$$0 \leq a_2 = \frac{k(b^3 - 1)}{a_1} \leq \frac{k(b^3 - 1)}{kb^2} < b.$$

Together with $(*)$, we conclude that $a_2 = 0$ or $a_2 = b/2$ (in the latter case b must be even).

If $a_2 = 0$, then $b^3 - 1 = 0$, and hence $a_1 = 2k$, $b = 1$.

If $a_2 = b/2$, then $k = b^2/4$ and $a_1 = b^4/2 - b/2$.

Therefore the only possibilities are

$$(a, b) = (2l, 1) \quad \text{or} \quad (l, 2l) \quad \text{or} \quad (8l^4 - l, 2l)$$

for some positive integer l. All of these pairs satisfy the given condition.

Comment 1. An alternative way to see $(*)$ is as follows: Fix $a \geq 1$ and consider the function $f_a(b) = 2ab^2 - b^3 + 1$. Then f_a is increasing on $[0, 4a/3]$ and decreasing on $[4a/3, \infty)$. We have

$$\begin{aligned}
f_a(a) &= a^3 + 1 > a^2, \\
f_a(2a - 1) &= 4a^2 - 4a + 2 > a^2, \\
f_a(2a + 1) &= -4a^2 - 4a < 0.
\end{aligned}$$

Hence if $b \geq a$ and $a^2/f_a(b)$ is a positive integer, then $b = 2a$.

Indeed, if $a \leq b \leq 4a/3$, then $f_a(b) \geq f_a(a) > a^2$, and so $a^2/f_a(b)$ is not an integer, a contradiction, and if $b > 4a/3$, then

(i) if $b \geq 2a + 1$, then $f_a(b) \leq f_a(2a + 1) < 0$, a contradiction;

(ii) if $b \leq 2a - 1$, then $f_a(b) \geq f_a(2a - 1) > a^2$, and so $a^2/f_a(b)$ is not an integer, a contradiction.

Comment 2. There are several alternative solutions to this problem. Here we sketch three of them.

1. The discriminant D of the equation (‡) is the square of some integer $d \geq 0$: $D = (2b^2k - b)^2 + 4k - b^2 = d^2$. If $e = 2b^2k - b = d$, we have $4k = b^2$ and $a = 2b^2k - b/2, b/2$. Otherwise, the clear estimation $|d^2 - e^2| \geq 2e - 1$ for $d \neq e$ implies $|4k - b^2| \geq 4b^2k - 2b - 1$. If $4k - b^2 > 0$, this implies $b = 1$. The other case yields no solutions.

2. Assume that $b \neq 1$ and let $s = \gcd(2a, b^3 - 1)$, $2a = su$, $b^3 - 1 = st'$, and $2ab^2 - b^3 + 1 = st$. Then $t + t' = ub^2$ and $\gcd(u, t) = 1$. Together with $st \mid a^2$, we have $t \mid s$. Let $s = rt$. Then the problem reduces to the following lemma:

> **Lemma.** Let b, r, t, t', u be positive integers satisfying $b^3 - 1 = rtt'$ and $t + t' = ub^2$. Then $r = 1$. Furthermore, either one of t or t' or u is 1.

The lemma is proved as follows. We have $b^3 - 1 = rt(ub^2 - t) = rt'(ub^2 - t')$. Since $rt^2 \equiv rt'^2 \equiv 1 \pmod{b^2}$, if $rt^2 \neq 1$ and $rt'^2 \neq 1$, then $t, t' > b/\sqrt{r}$. It is easy to see that

$$r\frac{b}{\sqrt{r}}\left(ub^2 - \frac{b}{\sqrt{r}}\right) \geq b^3 - 1,$$

unless $r = u = 1$.

3. With the same notation as in the previous solution, since $rt^2 \mid (b^3 - 1)^2$, it suffices to prove the following lemma:

> **Lemma.** Let $b \geq 2$. If a positive integer $x \equiv 1 \pmod{b^2}$ divides $(b^3 - 1)^2$, then $x = 1$ or $x = (b^3 - 1)^2$ or $(b, x) = (4, 49)$ or $(4, 81)$.

To prove this lemma, let p, q be positive integers with $p > q > 0$ satisfying $(b^3 - 1)^2 = (pb^2 + 1)(qb^2 + 1)$. Then

$$b^4 = 2b + p + q + pqb^2. \tag{1}$$

A natural observation leads us to multiply (1) by $qb^2 - 1$. We get

$$\left(q(pq - b^2) + 1\right)b^4 = p - (q + 2b)(qb^2 - 1).$$

Together with the simple estimation

$$-3 < \frac{p - (q + 2b)(qb^2 - 1)}{b^4} < 1,$$

the conclusion of the lemma follows.

Comment 3. The problem was originally proposed in the following form:

> Let a, b be relatively prime positive integers. Suppose that $a^2/(2ab^2 - b^3 + 1)$ is a positive integer greater than 1. Prove that $b = 1$.

G6. Each pair of opposite sides of a convex hexagon has the following property:

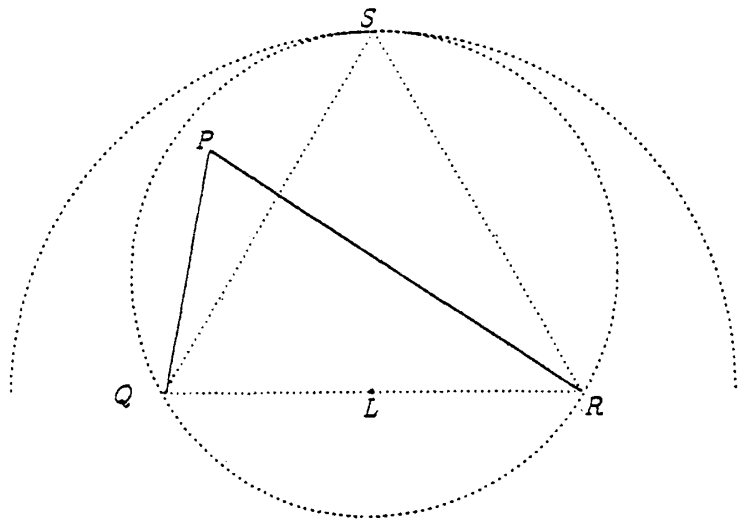
the distance between their midpoints is equal to $\sqrt{3}/2$ times the sum of their lengths.

Prove that all the angles of the hexagon are equal.

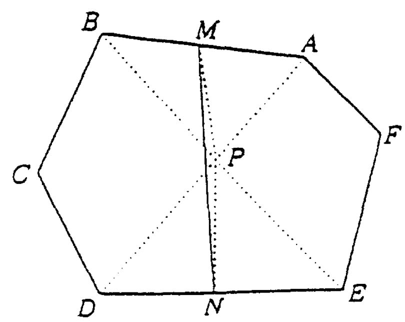
Solution 1. We first prove the following lemma:

Lemma. Consider a triangle PQR with $\angle QPR \geq 60°$. Let L be the midpoint of QR. Then $PL \leq \sqrt{3}\,QR/2$, with equality if and only if the triangle PQR is equilateral.

Proof.



Let S be the point such that the triangle QRS is equilateral, where the points P and S lie in the same half-plane bounded by the line QR. Then the point P lies inside the circumcircle of the triangle QRS, which lies inside the circle with centre L and radius $\sqrt{3}\,QR/2$. This completes the proof of the lemma. ∎



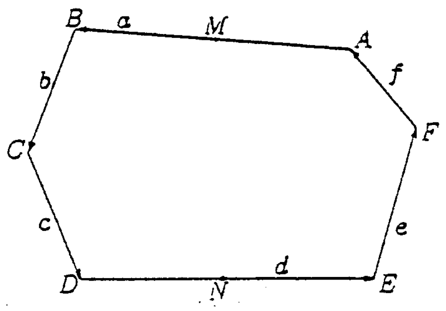
The main diagonals of a convex hexagon form a triangle though the triangle can be degenerated. Thus we may choose two of these three diagonals that form an angle greater than or equal to 60°. Without loss of generality, we may assume that the diagonals AD and BE of the given hexagon $ABCDEF$ satisfy $\angle APB \geq 60°$, where P is the intersection of these diagonals. Then, using the lemma, we obtain

$$MN = \frac{\sqrt{3}}{2}(AB + DE) \geq PM + PN \geq MN,$$

where M and N are the midpoints of AB and DE, respectively. Thus it follows from the lemma that the triangles ABP and DEP are equilateral.

Therefore the diagonal CF forms an angle greater than or equal to 60° with one of the diagonals AD and BE. Without loss of generality, we may assume that $\angle AQF \geq 60°$, where Q is the intersection of AD and CF. Arguing in the same way as above, we infer that the triangles AQF and CQD are equilateral. This implies that $\angle BRC = 60°$, where R is the intersection of BE and CF. Using the same argument as above for the third time, we obtain that the triangles BCR and EFR are equilateral. This completes the solution.

Solution 2. Let $ABCDEF$ be the given hexagon and let $a = \overrightarrow{AB}$, $b = \overrightarrow{BC}$, ..., $f = \overrightarrow{FA}$.



Let M and N be the midpoints of the sides AB and DE, respectively. We have

$$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}a + b + c + \frac{1}{2}d \quad \text{and} \quad \overrightarrow{MN} = -\frac{1}{2}a - f - e - \frac{1}{2}d.$$

Thus we obtain

$$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(b + c - e - f). \tag{1}$$

From the given property, we have

$$\overrightarrow{MN} = \frac{\sqrt{3}}{2}(|a| + |d|) \geq \frac{\sqrt{3}}{2}|a - d|. \tag{2}$$

Set $x = a - d$, $y = c - f$, $z = e - b$. From (1) and (2), we obtain

$$|y - z| \geq \sqrt{3}\,|x|. \tag{3}$$

Similarly we see that

$$|z - x| \geq \sqrt{3}\,|y|, \tag{4}$$

$$|x - y| \geq \sqrt{3}\,|z|. \tag{5}$$

Note that

$$\begin{aligned}
(3) &\iff |y|^2 - 2y \cdot z + |z|^2 \geq 3|x|^2, \\
(4) &\iff |z|^2 - 2z \cdot x + |x|^2 \geq 3|y|^2, \\
(5) &\iff |x|^2 - 2x \cdot y + |y|^2 \geq 3|z|^2.
\end{aligned}$$

By adding up the last three inequalities, we obtain

$$-|x|^2 - |y|^2 - |z|^2 - 2y \cdot z - 2z \cdot x - 2x \cdot y \geq 0,$$

or $-|x + y + z|^2 \geq 0$. Thus $x + y + z = 0$ and the equalities hold in all inequalities above. Hence we conclude that

$$\begin{aligned}
x + y + z &= 0, \\
|y - z| &= \sqrt{3}\,|x|, \quad a \parallel d \parallel x, \\
|z - x| &= \sqrt{3}\,|y|, \quad c \parallel f \parallel y, \\
|x - y| &= \sqrt{3}\,|z|, \quad e \parallel b \parallel z.
\end{aligned}$$

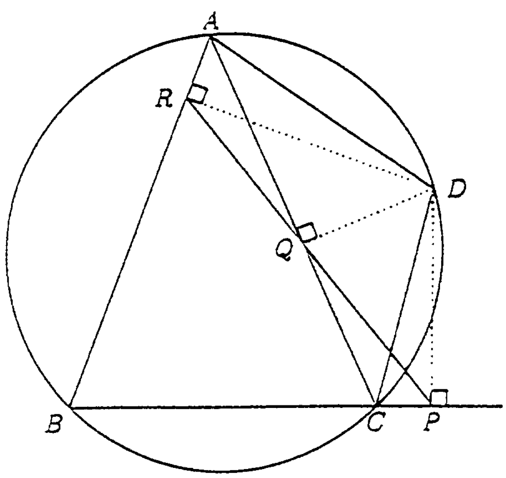
Suppose that PQR is the triangle such that $\overrightarrow{PQ} = x$, $\overrightarrow{QR} = y$, $\overrightarrow{RP} = z$. We may assume $\angle QPR \geq 60°$, without loss of generality. Let L be the midpoint of QR, then $PL = |z - x|/2 = \sqrt{3}\,|y|/2 = \sqrt{3}\,QR/2$. It follows from the lemma in Solution 1 that the triangle PQR is equilateral. Thus we have $\angle ABC = \angle BCD = \cdots = \angle FAB = 120°$.

Comment. We have obtained the complete characterisation of the hexagons satisfying the given property. They are all obtained from an equilateral triangle by cutting its 'corners' at the same height.

Geometry

G1. Let $ABCD$ be a cyclic quadrilateral. Let P, Q, R be the feet of the perpendiculars from D to the lines BC, CA, AB, respectively. Show that $PQ = QR$ if and only if the bisectors of $\angle ABC$ and $\angle ADC$ are concurrent with AC.

Solution 1.



It is well-known that P, Q, R are collinear (Simson's theorem). Moreover, since $\angle DPC$ and $\angle DQC$ are right angles, the points D, P, Q, C are concyclic and so $\angle DCA = \angle DPQ = \angle DPR$. Similarly, since D, Q, R, A are concyclic, we have $\angle DAC = \angle DRP$. Therefore $\triangle DCA \sim \triangle DPR$.

Likewise, $\triangle DAB \sim \triangle DQP$ and $\triangle DBC \sim \triangle DRQ$. Then

$$\frac{DA}{DC} = \frac{DR}{DP} = \frac{DB \cdot \frac{QR}{BC}}{DB \cdot \frac{PQ}{BA}} = \frac{QR}{PQ} \cdot \frac{BA}{BC}.$$

Thus $PQ = QR$ if and only if $DA/DC = BA/BC$.

Now the bisectors of the angles ABC and ADC divide AC in the ratios of BA/BC and DA/DC, respectively. This completes the proof.

Solution 2. Suppose that the bisectors of $\angle ABC$ and $\angle ADC$ meet AC at L and M, respectively. Since $AL/CL = AB/CB$ and $AM/CM = AD/CD$, the bisectors in question meet on AC if and only if $AB/CB = AD/CD$, that is, $AB \cdot CD = CB \cdot AD$. We will prove that $AB \cdot CD = CB \cdot AD$ is equivalent to $PQ = QR$.

Because $DP \perp BC$, $DQ \perp AC$, $DR \perp AB$, the circles with diameters DC and DA contain the pairs of points P, Q and Q, R, respectively. It follows that $\angle PDQ$ is equal to γ or $180^\circ - \gamma$, where $\gamma = \angle ACB$. Likewise, $\angle QDR$ is equal to α or $180^\circ - \alpha$, where $\alpha = \angle CAB$. Then, by the law of sines, we have $PQ = CD \sin\gamma$ and $QR = AD \sin\alpha$. Hence the condition $PQ = QR$ is equivalent to $CD/AD = \sin\alpha/\sin\gamma$.

On the other hand, $\sin\alpha/\sin\gamma = CB/AB$ by the law of sines again. Thus $PQ = QR$ if and only if $CD/AD = CB/AB$, which is the same as $AB \cdot CD = CB \cdot AD$.

Comment. Solution 2 shows that this problem can be solved without the knowledge of Simson's theorem.

A4. Let n be a positive integer and let $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n$ be real numbers.

(1) Prove that

$$\left(\sum_{i,j=1}^{n} |x_i - x_j|\right)^2 \leq \frac{2(n^2-1)}{3} \sum_{i,j=1}^{n} (x_i - x_j)^2.$$

(2) Show that the equality holds if and only if $x_1, \ldots, x_n$ is an arithmetic sequence.

Solution. (1) Since both sides of the inequality are invariant under any translation of all x_i's, we may assume without loss of generality that $\sum_{i=1}^{n} x_i = 0$.

We have

$$\sum_{i,j=1}^{n} |x_i - x_j| = 2\sum_{i<j}(x_j - x_i) = 2\sum_{i=1}^{n}(2i - n - 1)x_i.$$

By the Cauchy-Schwarz inequality, we have

$$\left(\sum_{i,j=1}^{n} |x_i - x_j|\right)^2 \leq 4\sum_{i=1}^{n}(2i-n-1)^2 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 4 \cdot \frac{n(n+1)(n-1)}{3} \sum_{i=1}^{n} x_i^2.$$

On the other hand, we have

$$\sum_{i,j=1}^{n}(x_i - x_j)^2 = n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{j=1}^{n} x_j + n\sum_{j=1}^{n} x_j^2 = 2n\sum_{i=1}^{n} x_i^2.$$

Therefore

$$\left(\sum_{i,j=1}^{n} |x_i - x_j|\right)^2 \leq \frac{2(n^2-1)}{3} \sum_{i,j=1}^{n} (x_i - x_j)^2.$$

(2) If the equality holds, then $x_i = k(2i - n - 1)$ for some k, which means that $x_1, \ldots, x_n$ is an arithmetic sequence.

On the other hand, suppose that $x_1, \ldots, x_{2n}$ is an arithmetic sequence with common difference d. Then we have

$$x_i = \frac{d}{2}(2i - n - 1) + \frac{x_1 + x_n}{2}.$$

Translate x_i's by $-(x_1 + x_n)/2$ to obtain $x_i = d(2i - n - 1)/2$ and $\sum_{i=1}^{n} x_i = 0$, from which the equality follows.

N6. Let p be a prime number. Prove that there exists a prime number q such that for every integer n, the number $n^p - p$ is not divisible by q.

Solution. Since $(p^p - 1)/(p-1) = 1 + p + p^2 + \cdots + p^{p-1} \equiv p + 1 \pmod{p^2}$, we can get at least one prime divisor of $(p^p - 1)/(p-1)$ which is not congruent to 1 modulo p^2. Denote such a prime divisor by q. This q is what we wanted. The proof is as follows. Assume that there exists an integer n such that $n^p \equiv p \pmod{q}$. Then we have $n^{p^2} \equiv p^p \equiv 1 \pmod{q}$ by the definition of q. On the other hand, from Fermat's little theorem, $n^{q-1} \equiv 1 \pmod{q}$, because q is a prime. Since $p^2 \nmid q-1$, we have $(p^2, q-1) \mid p$, which leads to $n^p \equiv 1 \pmod{q}$. Hence we have $p \equiv 1 \pmod{q}$. However, this implies $1 + p + \cdots + p^{p-1} \equiv p \pmod{q}$. From the definition of q, this leads to $p \equiv 0 \pmod{q}$, a contradiction.

Comment 1. First, students will come up, perhaps, with the idea that q has to be of the form $pk + 1$. Then,

$$\exists n \quad n^p \equiv p \pmod{q} \iff p^k \equiv 1 \pmod{q},$$

i.e.,

$$\forall n \quad n^p \not\equiv p \pmod{q} \iff p^k \not\equiv 1 \pmod{q}.$$

So, we have to find such q. These observations will take you quite naturally to the idea of taking a prime divisor of $p^p - 1$. Therefore the idea of the solution is not so tricky or technical.

Comment 2. The prime q satisfies the required condition if and only if q remains a prime in $k = \mathbb{Q}(\sqrt[p]{p})$. By applying Chebotarev's density theorem to the Galois closure of k, we see that the set of such q has the density $1/p$. In particular, there are infinitely many q satisfying the required condition. This gives an alternative solution to the problem.

附錄三

2003/08/11 傅承德教授於教育部演講稿

2003/08/11 傅承德教授於教育部演講稿

黃部長、教育部同仁、各位教授、老師、家長及同學大家好：

今天我想談一談奧林匹亞活動與科學研究之間的關係。這幾年我在台大財金研究所上課時，同學們常問的一個問題是如何用數學模型來分析股票市場。在回答此問題之前，我們先談一下布朗運動(Brownian motion)。在西元 1827 年，英國植物學家 Robert Brown 利用顯微鏡觀察懸浮於水中的花粉粒時，發現這些花粉粒會做連續快速而不規則的隨機移動，這種運動就稱為布朗運動。以後生物學家及化學家也發現懸浮於液體或空氣中直徑小於 0.04 公分的粒子都會產生布朗運動。比如說，當我們在比較暗的地方，有一道陽光照進來，我們很容易看到這道光線中有很多微小的灰塵飄浮在裏面，不知大家有沒有觀察到？這個就是布朗運動。

所以自 1860 年以來，許多科學家都在研究這樣的現象，其中一個重要的問題就是如何找一個數學模型來解釋這個現象。這個研究在 20 世紀初期有了重大突破。首先是愛因斯坦在 1905 年發現布朗運動可以用機率來分析，他的研究說明了粒子在一段時間內的運動是符合常態分配。

但是最完備的數學模型是 1923 年由 Norbert Wiener 所提出的，後來我們也稱布朗運動為 Wiener Process。之後，這一個模型被廣泛運用在電機工程裏的訊號處理、醫學工程的影像處理及經濟學的財務模型。其中財務模型中重要的一部分是利用布朗運動來描述股票市場，此一理論是由 Black-Scholes 及 Merton 在 1973 年分別提出的。其中 Black 是物理學家，Scholes 是經濟學家，Merton 是數學家。由此可見科學發展是由各個領域的專家通力合作所完成。Black 不幸在 1995 過世，而 Scholes 及 Merton 在 1997 年拿到諾貝爾經濟獎。

本人今年負責國際數學奧林匹亞活動，個人認為數學奧林匹亞本身就是科學研究的一部份。同學們在較短的時間內把一個已經成型的問題找出解決方法。比如說 APMO 是 4 個小時做 5 個題目只考 1 天, IMO 競賽是 4 個半小時做 3 個題目一共考 2 天。解決問題當然是科學研究的重要一步，但並不是全部；因為競試本身無法去測試學生提出問題的能力，而提出問題本身在科學研究中是重要的一環。

基於培養科學研究的精神，在今年度 IMO 的活動中，我們共分為三個階段。第一階段為 APMO 培訓，時間為 3 月中旬，在這個階段我們請了專家學者講述他們個人研究的課題與經驗和同學們分享。第二階段為 IMO 選訓，時間為 4 月份，在這個階段中研究課題與競賽課題各半。第三階段為 IMO 培訓，時間是 5、6 月，這個階段我們加強國手的解題能力。

在整個活動過程中同學及老師們都非常辛苦，尤其是受到 SARS 的影響，在五、

六月國手最後培訓期間都是戴著口罩上課及解題。但經由大家的努力，最後總算有今年的成果。今年 APMO 共獲得一金二銀四銅三榮譽獎，排名第二名；IMO 共獲得一金二銀二銅一榮譽獎，排名第十六名。對此一結果，我做了簡單的分析。

1、 此次 IMO 競賽的團體成績與第十名只差 14 分，與第 8 名只差 19 分，這個差異只在於 2~3 題的分數。

2、 產生如此小分數的差異，可歸因於部分同學的些微失常。

3、 造成同學失常的原因或許是緊張，或許是 SARS 隔離所造成的。其理由如下：一、APMO 是三月份舉行，所以沒到受到 SARS 影響而成績表現正常。二、凡是受到 SARS 影響的國家如加拿大、中國大陸、香港及新加坡，除加拿大持平外，其餘國家的成績皆下滑。

根據以上的分析，造成這麼小的差異可歸因於誤差的影響而並非程度的降低。就好像電視有雜訊，可能是布朗運動所造成的短暫收訊不良，而非電視品質的不佳。股票指數的下跌可能是布朗運動所造成的短暫現象，而非整體經濟的下滑。最簡單的比喻就好像是功課好的同學，在考試的前一天突然生病而影響到當天的考試成績，這並不代表這個同學的程度不好，用學術上專有名詞來說，可能是布朗運動所造成的一種<u>誤差</u>。

前面提到對布朗運動最重要貢獻的學者是 Wiener，他從小就是被公認為數學資優生，在 20 歲就拿到博士，但他在 20~30 歲其間也是經過一番努力，才做出布朗運動的數學模型。之後他也是人工智慧學的創始者，在工程方面有重要的突破，現在 MIT 的工學院就稱為 Wiener Building。所以各位同學往後只要不斷的努力，在現有基礎上，未來無論在任何領域都可做出重要的結果。

國際數理及資訊奧林匹亞活動中，大眾看到都是最後的比賽結果。但是在活動中，同學們的學習與成長，和比賽結果是同等重要的。我們也希望經由此一活動能夠帶動科學教育的整體成長，就好像 60 年代末及 70 年代台灣少棒的發展，帶動了以後台灣棒球整體的發展。

在此我要感謝教育部同仁的辛勞，尤其是因為 SARS 的關係，在很短的時間內接到通知，必需馬上安排老師及同學們到日本隔離，在隔離期間也要感謝駐日代表處對本團的協助。感謝中研院院長、數學所及統計所所長及同仁的鼎力支持，當然我們也感謝輔導教授及老師們的辛勤指導。最後我特別感動的是天下父母心，在同學訓練期間，家長們不辭辛勞的舟車往返接送。沒有大家的努力，這個活動是無法順利完成的。謹祝大家身體健康、精神愉悅。謝謝。